Exercice 1 Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».
Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio » ;

c_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n, la matrice ligne $(b_n \ \ c_n)$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013 + n$.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
   (b) Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   (c) On donne la matrice M^2 :
   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0,175 \\ 0{,}262\ 5 & 0{,}737\ 5 \end{pmatrix}.$$
   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».
   (d) Déterminer l'état stable $(b \ \ c)$ du graphe probabiliste.
2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».
   (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

```
Variables :
    N un nombre entier naturel non nul
    B un nombre réel
Traitement :
    N prend la valeur 0
    B prend la valeur 0,2
    C prend la valeur 0,8
    Tant que ................ Faire
        B prend la valeur 0,9 × B + 0,15 × C
        C prend la valeur 1 − B
        N prend la valeur N + 1
    FinTant
Sortie :
    Afficher ................
```

   (b) Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

Exercice 2 Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).
   (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
   (c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$.
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.
3. (a) Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.
   (b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
4. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0{,}8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0{,}8 - 0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.
   (c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
   (d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Entrée :
    Saisir n
Traitement :
    a prend la valeur 0,5
    b prend la valeur 0,5
    Pour i allant de 2 à n Faire
        a prend la valeur ....$\times a+$................
        b prend la valeur $1 - a$
    FinPour
Sortie :
    Afficher a, b

Exercice 3 Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1^er^ septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.
Soit $P_n = (d_n \quad e_n \quad e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1^er^ septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1. (a) Donner sans justification la matrice P_0.
   (b) Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.
   On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

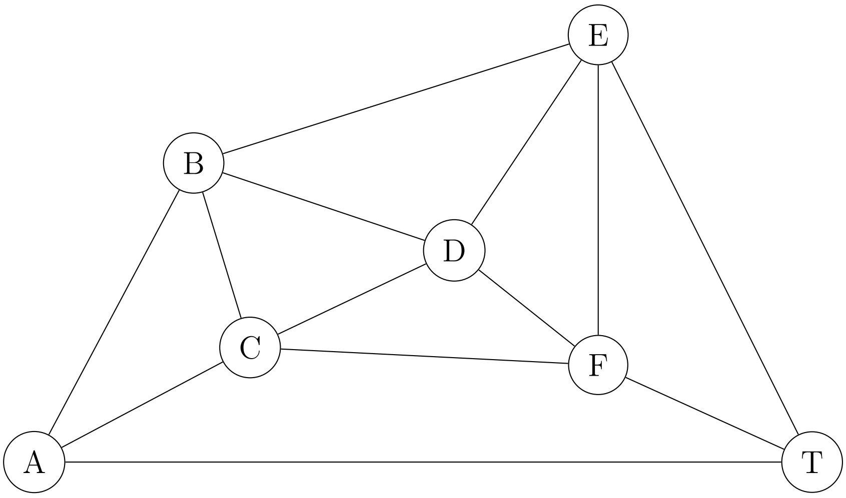
$$M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & \boldsymbol{\mathit{0{,}6}} & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & \boldsymbol{\mathit{0{,}8}} \end{pmatrix}$$

   Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}085 & 0{,}331 & 0{,}584 \\ 0{,}097 & 0{,}293 & 0{,}610 \\ 0{,}104 & 0{,}298 & 0{,}598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}100 & 0{,}299 & 0{,}601 \\ 0{,}100 & 0{,}300 & 0{,}600 \\ 0{,}100 & 0{,}300 & 0{,}600 \end{pmatrix}$$

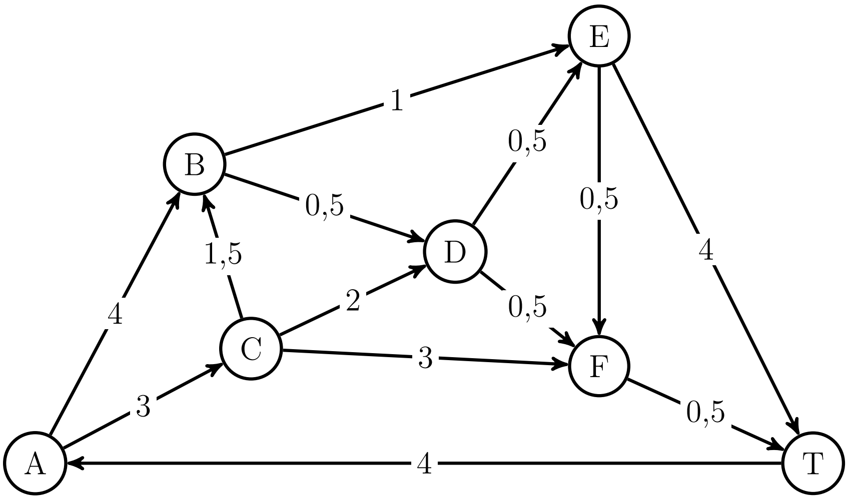
2. Dans cette matrice on lit ***0,6*** et ***0,8*** en italique gras.
   (a) Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.
   (b) Calculer P_1.
   (c) Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1^er^ septembre 2017. Les résultats seront donnés à 0,1 % près.
3. (a) En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.
   (b) Vérifier cette conjecture.
   (c) Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

Exercice 4 Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les « taxiways ») et les sommets du graphe sont les intersections.



1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.
2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B
Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. (a) Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
   (b) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
   Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.