LYCÉE ALFRED KASTLER **TES spé 2014–2015**

Exponentielle et logarithme

a. Exponentielle

Une exponentielle est strictement positive, quelque soit l'expression u à l'intérieur : $\mathrm{e}^u > 0$.
e^u a les mêmes variations que u (**mais pas les mêmes images**).
Pour résoudre des (in)équations on utilise les propriétés suivantes :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$$
$$\mathrm{e}^a \geqslant \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \geqslant b$$

Exemple

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\ln(5)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(5) \end{aligned}$$

L'exponentielle transforme une somme en produit : $\mathrm{e}^{(a+b)} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
On a la formule de dérivation suivante : $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.

b. Logarithme

ln est définie pour des nombres positifs uniquement (sur $]0;+\infty[$) **mais ln n'est pas positif !**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Pour résoudre des (in)équations on utilise les propriété suivantes :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \geqslant b$$

Exemple

$$\begin{aligned} \ln(x) \geqslant -4 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant \ln\left(\mathrm{e}^{-4}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \mathrm{e}^{-4} \end{aligned}$$

Le logarithme transforme un produit en somme : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
On a la formule de dérivation suivante : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Quand on résout des (in)équations avec un logarithme, il faut avant toute chose déterminer l'ensemble de définition de celles-ci. Cela signifie qu'il faut déterminer l'ensemble sur lequel toutes les expressions dans les logarithmes sont strictement positives.

Remarque les fonctions ln et exp sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, ce qui signifie que $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (pour $x \in]0;+\infty[$) et $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 1 A-t-on l'égalité $\mathrm{e}^{5\ln 2} \times \mathrm{e}^{7\ln 4} = 2^{19}$?

Exercice 2 Calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{5x+2}$.

Exercice 3 Déterminer la dérivée B' de la fonction B définie par $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$.

Exercice 4 Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500 \leqslant 0$.

Exercice 5 On pose $u_n = 2 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. À partir de quel rang a-t-on $u_n - 1 \leqslant 10^{-6}$?

Exercice 6 Résoudre l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$.

Exercice 7 On définit $f(x) = 2x + 5 + 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;18]$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,18]$.
2. (a) Montrer que $2 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}2x+1} \geqslant 0$ est équivalent à $x \geqslant 5 + 5\ln 4$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[1\,;\,18]$. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.
3. (a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1\,;\,18]$.
   (b) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)dx$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0{,}5}$.

1. Démontrer que $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0{,}5}$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 5]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 5]$.

Exercice 9 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (2x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 10 f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.
On suppose que $f(x) = ax + b - \mathrm{e}^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que $a = 2$ et $b = 3$.
3. Déterminer sur $\mathbb{R}$ une primitive F de f.

Exercice 11 On définit f sur $[1; 10]$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Construire le tableau de variations de f sur $[1; 10]$.
3. (a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ sur $[1; 10]$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[1; 10]$.
   (c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ de f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.