

# Chapitre :

# Matrices



## I. Généralités

---

⊗ **Activité** : 1p296

**Définition** Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice** réelle à  $n$  lignes et  $p$  colonnes la donnée d'un tableau rectangulaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes composé de nombres réels. Les éléments d'une matrice sont appelés **coefficients** ou **termes** de la matrice.

On dit qu'une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est **d'ordre**  $(n,p)$  ou de **dimension**  $n \times p$ .

L'ensemble des matrices de dimension  $n \times p$  à coefficients réels se note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -2 \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$$

la matrice  $A$  est de dimension  $3 \times 2$ .

**Définition** Soit  $A$  une matrice de dimension  $n \times p$ .

On note  $a_{ij}$  le terme de la matrice situé à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne.

**Exemple** Le terme  $a_{22}$  (ou  $a_{2,2}$  en cas d'ambiguïté) de la matrice  $A$  de l'exemple plus haut est  $-2$ .

Le terme  $a_{31}$  est  $\sqrt{3}$ .

**Définition (Cas particuliers)**

- Si  $n = 1$  (une seule ligne) on dit que la matrice est une **matrice ligne**.
- Si  $p = 1$  (une seule colonne) on dit que la matrice est une **matrice colonne**.
- Si  $n = p$  (même nombre de lignes que de colonnes) on dit que la matrice est une **matrice carrée**. On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .

**Définition (Transposée)** Soit  $A$  une matrice. La matrice transposée de  $A$ , notée  ${}^tA$ , est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de  $A$ . Elle est donc de dimension  $p \times n$ .

**Exemple** La matrice transposée de  $A$  donnée plus haut est

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

**Calculatrice** : On peut utiliser les matrices avec les calculatrices. Voir livre page 299.

► **Exercices** : 5-7,10,11p322, 18p323

**Définition (Égalité)** Deux matrices  $A$  et  $B$  sont égales si elles ont les mêmes dimensions et si leurs coefficients sont égaux position par position ( $a_{ij} = b_{ij}$ )

**Exemple** Faire l'exercice 13p323.

► **Exercices** : 14,15p323

## II. Opérations

---

⊗ **Activité** : 2p300 (sauf la dernière partie 8.)

**Définition (Somme)** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices réelles de mêmes dimensions. On appelle somme de  $A$  et  $B$  la matrice notée  $A+B$ , de mêmes dimensions que  $A$  et  $B$ , obtenue en ajoutant les coefficients situés en même position dans  $A$  et dans  $B$ .

**Exemple** Somme de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Définition (Produit par un réel)** Soit  $A$  une matrice et  $\lambda$  un réel. On appelle produit de  $A$  par le réel  $\lambda$  la matrice, notée  $\lambda A$ , de mêmes dimensions que  $A$ , obtenue en multipliant tous les coefficients de  $A$  par  $\lambda$ .

Dans le cas particulier où  $\lambda = -1$ , on obtient la matrice  $-A$ , opposée de  $A$ .

**Exemple** Prendre  $A$  de l'exemple précédent, et multiplier par  $-2$ .

**Propriété** | Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices de mêmes dimensions. Soit  $k$  et  $k'$  deux réels. Alors :

- $A+B = B+A$  : l'addition est commutative ;
- $(A+B)+C = A+(B+C)$  : l'addition est associative ;
- $k(A+B) = kA+kB$  : le produit par un réel est distributif ;
- $k(k'A) = k'(kA) = (kk')A$  : associativité mixte.

► **Exercices** : 21,22 (sauf 3. à moins de définir  $I_n$ ),24,27p324

**Définition (Produit de matrices)** Soit  $A$  une matrice de dimensions  $n \times r$  et  $B$  une matrice de dimensions  $r \times p$ . On appelle produit des matrices  $A$  et  $B$  la matrice de dimensions  $n \times p$  telle que l'élément à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  est obtenue à partir de la ligne  $i$  de  $A$  et la colonne  $j$  de  $B$  comme suit :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ir} \times b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik} \times b_{kj}$$

**Exemple** Un produit  $2 \times 3$  par  $3 \times 2$

**Remarque** À cause des dimensions, si le produit  $A \times B$  existe, ce n'est pas forcément le cas de  $B \times A$ . Et si les deux produits existent, ils ne sont en général pas égaux (voir l'exemple précédent : les dimensions ne sont même pas identiques).

► **Exercices** : 35,37,38,41p325

**Définition (Identité)** On appelle matrice identité de taille (ou d'ordre)  $n$  la matrice carrée d'ordre  $n$ , notée  $I_n$ , dont les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à 1, et tous les autres 0. La diagonale principale est celle qui va du coefficient  $a_{11}$  au coefficient  $a_{nn}$ .

### Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice par  $I_n$  a le même effet que multiplier un nombre par 1 :

**Propriété** | Soit  $n$  un entier, et  $A$  et  $B$  deux matrices. Si les produits suivants, existent, alors :

$$B \times I_n = B \quad \text{et} \quad I_n \times A = A$$

**Propriété** | Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices. Si les opérations indiquée sont possibles alors on a :

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$  : le produit se distribue à gauche sur la somme
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$  : le produit se distribue à droite sur la somme
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$  : le produit est associatif

**Définition (puissance)** Soit  $A$  une matrice carrée de rang  $n$ , et soit  $p$  entier non nul. Alors  $A^p$  est la matrice définie par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

- ▶ **Exercices** : 30p324, 31p325, 40p325 (produit et transposée)
- ▶ **Exercices** : 49p327 (non commutativité)
- ▶ **Exercice** : 55p327 (algorithmique)
- ▶ **Exercice** : 64,65 p328 (traduction tableaux vers matrices)

# III. Matrices inverses

---

⊗ **Activité** : 3p306 (parties 1 à 3)

**Définition** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$  telle que

$$A \times B = I_n$$

On admet alors que l'on a également  $B \times A = I_n$ .

**Propriété** | Soit  $A$  une matrice inversible.

Alors il existe une unique matrice  $B$  telle que  $A \times B = B \times A = I_n$ .

On note cette matrice  $A^{-1}$  et on l'appelle matrice inverse de  $A$ .

**Démonstration** : Soit  $B$  et  $C$  telles que  $A \times B = A \times C = I_n = C \times A = B \times A$ . Alors

$$B = B \times I_n = B \times (A \times C) = (B \times A) \times C = I_n \times C = C$$

(on a utilisé l'associativité du produit matriciel)

□

La calculatrice est capable de déterminer  $A^{-1}$ .

**Remarque** On peut déterminer la matrice inverse d'une matrice  $A$ , quand elle existe, en résolvant un système d'équations.

**Application** (voir page 309) :

Un système d'équations linéaires peut se ramener à la recherche d'une matrice inverse.

En effet, si l'on appelle  $X$  la matrice colonne des inconnues, et si l'on peut ramener le système d'équation à une équation matricielle  $AX = B$  où  $A$  est une matrice carrée inversible, alors on a  $X = A^{-1}B$ .

► **Exercices** : 66,67,69p329 (traduction sous forme matricielle).

► **Exercices** : 71,72,73p329 (inversion de matrice)

► **Exercices** : 74,75p329

► **Exercices** : 81,82p330 (83 en DM?)

► **Exercices** : 84,85p330 (coefficients de fonctions polynomiales)