

DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 28 janvier 2015

MATHÉMATIQUES

Série STMG

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient 3

TSTMG

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte
pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou
non fructueuse, qu'il aura développée.
Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.**

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 (6 points)

On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie plusieurs modèles d'évolution de cette population.

En 2013, la population de la ville était de 15 000 habitants.

Partie A - Étude de deux modèles d'évolution

1. Hypothèse 1

En analysant l'évolution récente, on fait d'abord l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 1 000 habitants par an.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants pour l'année 2013 + n . On a ainsi $u_0 = 15\,000$.

- Que représente u_1 ? Calculer u_1 et u_2 .
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
- Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?
- Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 30 000 habitants ?

2. Hypothèse 2

On fait à présent l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an.

Le nombre d'habitants pour l'année (2013 + n) est modélisé par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 15\,000$.

- Calculer les valeurs des termes v_1 et v_2 arrondies à l'unité.
- Déterminer la raison de la suite (v_n) ?
- Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- Calculer, selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2028.
- En examinant l'évolution de villes comparables à celle que l'on étudie ici, des experts ont estimé que sa population allait augmenter de 50 % en 15 ans. Le résultat trouvé à la question précédente est-il en accord avec les prévisions des experts ? Justifier.

Partie B - Analyse des résultats sur tableur

On utilise un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles. Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Population selon l'hypothèse 1	15 000							
4	Population selon l'hypothèse 2	15 000							

- Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (u_n) pour n variant de 1 à 7 ?
- Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C4, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (v_n) pour n variant de 1 à 7 ?

Exercice 2 (4 points)

L'entreprise SAPIQ commercialise des pots de moutarde de 800 g. Un pot est déclaré « conforme » s'il contient entre 790 g et 810 g de moutarde.

L'entreprise dispose de deux machines m_1 et m_2 . La première machine m_1 produit 60 % des pots fabriqués par l'entreprise, le reste de la fabrication étant assuré par la machine m_2 . 7 % des pots produits par la machine m_1 sont non conformes, alors que la proportion de pots non conformes produits par la machine m_2 est de 2 % seulement.

On prélève un pot au hasard dans la production totale. On adopte les notations suivantes :

- M_1 désigne l'événement « le pot provient de la machine m_1 » ;
- M_2 désigne l'événement « le pot provient de la machine m_2 » ;
- C désigne l'événement : « le pot est conforme ».

Pour tout événement E , on note $p(E)$ sa probabilité et \bar{E} l'événement contraire de E .

1. Traduire les données de l'exercice dans un arbre de probabilités et compléter l'arbre.
2. (a) Calculer la probabilité $p(M_1 \cap \bar{C})$; interpréter cette probabilité.
(b) Vérifier que $p(M_2 \cap \bar{C}) = 0,008$.
3. Justifier que $p(\bar{C}) = 0,05$.
4. On prélève au hasard un pot parmi les pots non-conformes.
Déterminer la probabilité qu'il provienne de la machine m_2 .

Exercice 3 (4 points) Cet exercice est un Q.C.M.

Pour chaque question posée, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Une réponse exacte rapporte un point ; une fausse réponse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève pas de point. Pour chaque question, recopier sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur d'une action cotée en Bourse a baissé de 37,5%. Sa valeur a été multipliée par :
a. 0,375 **b.** 1,375 **c.** 1,625 **d.** 0,625
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir n
u prend la valeur 5
Pour i allant de 1 à n Faire
  | u prend la valeur 0,94 × u
FinPour
Afficher u
```

- Si l'on choisit $n = 8$, l'algorithme affichera (à 0,01 près) :
- a.** 3,24 **b.** 3,05 **c.** 0,61 **d.** $0,94 \times 5$
 3. En 2014 le prix d'une adhésion à un club de sport pour un adulte avait atteint 147,00€ après une augmentation globale de 5% sur deux ans. Quel était le prix de l'adhésion en 2012 ?
a. 132,00 **b.** 133,33 **c.** 139,65 **d.** 140,00
 4. Un indice passe de 112,60 à 123,86. Son augmentation a donc été de :
a. 9,09% **b.** 10% **c.** 11% **d.** 11,26%

Exercice 4 (6 points)

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

Partie A - Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$$

où x appartient à l'intervalle $[0; 10]$.

La courbe Γ , représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée en annexe.

- Donner par lecture graphique (montrer sur le graphique comment les obtenir) :
 - le coût total d'une production de 4 tonnes ;
 - la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.
- Déterminer par le calcul :
 - le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.
 - le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.
- Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.
 - Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.
 - On note R la fonction qui modélise la recette, en milliers d'euros, pour x tonnes vendues. Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x .
 - Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0; 10]$, dans le même repère que la courbe Γ sur l'annexe (à rendre avec la copie).
 - Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Expliquer.

Partie B - Étude algébrique du bénéfice

On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0; 10]$.

- Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0; 10]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

- On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$.
- Justifier que $B'(x)$ peut s'écrire

$$B'(x) = (x + 2)(18 - 3x).$$

- On admet que la fonction B a les variations données par le tableau suivant, dont certaines valeurs ont été effacées (remplacées par des '?') :

x	0	6	10
Signe de $B'(x)$	+	0	-
variations de B	?	?	?

Quelle est la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal ?
Donner le bénéfice maximal.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Exercice 4

