

Devoir surveillé n° 5 – mathématiques  
Correction du type bac**Exercice 1****Partie A - Étude de deux modèles d'évolution****1. Hypothèse 1**

- (a)  $u_1$  représente le nombre d'habitants pour l'année 2014.  
 $u_1 = 15\ 000 + 1\ 000 = 16\ 000$  et  $u_2 = 16\ 000 + 1\ 000 = 17\ 000$ .
- (b) La suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 1 000 puisque chaque terme, sauf le premier, se déduit du précédent en ajoutant le même nombre.
- (c) Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  est  $u_n = u_0 + (n)r$ , donc  $u_n = 15\ 000 + 1\ 000n$ .
- (d) Selon ce modèle, la population en 2018 devrait être de 20 000 habitants. Le rang de l'année est 5, par conséquent nous avons  $u_5 = 15\ 000 + 1\ 000 \times 5 = 20\ 000$ .
- (e) Selon ce modèle, déterminons en quelle année la population devrait atteindre 30 000 habitants. Pour ce faire, résolvons  $15\ 000 + 1\ 000n = 30\ 000$ .
- $$15\ 000 + 1\ 000n = 30\ 000 \iff n = \frac{30\ 000 - 15\ 000}{1\ 000} = 15$$
- La population devrait atteindre 30 000 habitants en 2028 (2013+15).

**2. Hypothèse 2**

On fait à présent l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an.

Le nombre d'habitants pour l'année (2013 +  $n$ ) est modélisé par le terme  $v_n$  d'une suite géométrique. Ainsi  $v_0 = 15\ 000$ .

- (a) À un taux d'évolution de 4,7 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,047.  
 $v_1 = 15\ 000 \times 1,047 = 15\ 705$  et  $v_2 = 15\ 705 \times 1,047 \approx 16\ 443$ .
- (b) La suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 1,047.
- (c) Le terme général d'une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  est  $u_n = u_0 \times (q)^n$ , donc  $u_n = 15\ 000 \times (1,047)^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- (d) Selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2028 est  $v_{15}$  puisque le rang de l'année est 15.  $v_{15} = 15\ 000 \times 1,047^{15} \approx 29\ 874$ .
- (e) En examinant l'évolution de villes comparables à celle que l'on étudie ici, des experts ont estimé que sa population allait augmenter de 50 % en 15 ans. Le résultat trouvé à la question précédente n'est pas en accord avec les prévisions des experts car la population est quasiment multipliée par 2 soit une augmentation de près de 100 %.

**Partie B - Analyse des résultats sur tableur**

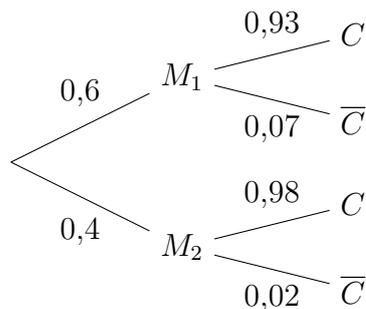
On utilise un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles.

Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

- Une formule que nous pouvons saisir dans la cellule C3, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite  $(u_n)$  pour  $n$  variant de 1 à 7 est =B\$3+1000.
- Une formule que nous pouvons saisir dans la cellule C4, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite  $(v_n)$  pour  $n$  variant de 1 à 7 est =B\$4\*1,047.

**Exercice 2**

1. L'arbre est le suivant :



2. (a)  $p(M_1 \cap \bar{C}) = p_{M_1 \bar{C}} \times p(M_1) = 0,07 \times 0,6 = 0,042$ .  
 (b)  $p(M_2 \cap \bar{C}) = p_{C_2}(\bar{C}) \times p(M_2) = 0,02 \times 0,4 = 0,008$ .  
 3.  $\bar{C} = (M_1 \cap \bar{C}) \cup (M_2 \cap \bar{C})$ ; c'est une réunion d'événements incompatibles.  
 On en déduit :  $p(\bar{C}) = p(M_1 \cap \bar{C}) + p(M_2 \cap \bar{C}) = 0,042 + 0,008 = 0,05$ .  
 4. On prélève au hasard un pot parmi les pots non-conformes.  
 La probabilité qu'il provienne de la machine  $M_2$  est :

$$p_{\bar{C}}(M_2) = \frac{p(M_2 \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{0,008}{0,05} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0,16.$$

### Exercice 3

- La bonne réponse est **b.** : 1,375.
- La bonne réponse est **b.** : 3,05 (car le calcul est  $5 \times 0,94^8$ ).
- La bonne réponse est **d.** : 140,00 (car le calcul est  $147 \div 1,05$ ).
- La bonne réponse est **b.** : 10% (car le calcul est  $\frac{123,86 - 112,60}{112,60} \times 100$ ).

### Exercice 4

#### Partie A - Étude du coût total et de la recette

- Estimons par lecture graphique :
  - le coût total d'une production de 4 tonnes ;  
 Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 soit 200.  
 Le coût total de production de 4 tonnes est d'environ 200 milliers d'euros.
  - la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.  
 Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 600 soit environ 9 tonnes
- Déterminons par le calcul :
  - le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage. Calculons  $C(6)$ .  
 $C(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 24 \times 6 + 135 = 144 + 135 = 279$ .  
 Le coût total de production de 6 tonnes est 279 milliers d'euros.
  - le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes. Lorsque l'entreprise produit 6 tonnes, elle dépense 279 milliers d'euros. Cette dépense est répartie sur chaque tonne  $\frac{279}{6} = 46,5$  donc le coût moyen dans ces conditions, est de 46,5 milliers d'euros.
- La recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage est de 300 milliers d'euros  $60 \times 5 = 300$ .
  - L'expression de  $R(x)$  en fonction de  $x$  est  $R(x) = 60x$ .
  - La fonction  $R$  est représentée sur l'intervalle  $[0; 10]$ , dans le même repère que la courbe  $\Gamma$  sur l'annexe, donnée ici à la fin de l'exercice.

- (d) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la droite représentant la recette est au dessus de la courbe  $\Gamma$ . Nous lisons :  $x$  appartient à l'intervalle  $[3 ; \approx 8,4]$ .

### Partie B - Étude algébrique du bénéfice

On note  $B$  la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

1. Le bénéfice est la différence entre les recettes et les coûts.

$$B(x) = 60x - (x^3 - 6x^2 + 24x + 135) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

Nous obtenons le résultat attendu.

2. Déterminons  $B'(x)$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

$$B'(x) = -(3x^2) + 6(2x) + 36 = -3x^2 + 12x + 36$$

3. On développe :  $(x + 2)(18 - 3x) = 18x - 3x^2 + 36 - 6x = -3x^2 + 12x + 36 = B'(x)$ .

4. En lisant le tableau de variations, la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal est de 6 tonnes. Ce bénéfice est de  $B(6) = 81$  milliers d'euros.

