Chapitre : Dérivation

∽

I. Fonctions polynomiales

⊛ **Activité :** 1p70 (recherche de formule pour x^n)

1. Dérivées

Propriété **(Dérivée d'une fonction constante)**
Soit k un nombre réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.
Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 0$.

Propriété **(Dérivée de la fonction $x \mapsto x$)**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.
Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 1$.

Propriété **(Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$)**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = nx^{n-1}$.

On a donc le tableau suivant :

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}
$\dots$	$\dots$

▶ **Exercices :** 1,2p78 et 38p80

⊛ **Activité :** 2p70 (opérations)

Propriété **(Dérivation de ku)**
Soit k un nombre réel et u une fonction.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ku(x)$.
Alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = ku'(x)$.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3$. Alors $f(x) = ku(x)$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.
Comme $u'(x) = 3x^2$, alors $f'(x) = 5 \times 3x^2$.

Propriété (**Dérivation de $u+v$**)
Soit u et v deux fonctions.
Soit f la fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$.
Alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple Soit $f(x) = x^3 + x^2$. Alors $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2$.
Comme $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x$, alors $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

À l'aide de toutes les propriétés précédentes, on peut alors déterminer la fonction dérivée de toute fonction polynomiale.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x$.
Alors $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 7 \times (2x) + 3 \times (1) = 15x^2 + 14x + 3$

▶ **Exercices :** 3,4,6p78 et 39,40,41p80 (produit par un réel)

▶ **Exercices :** 8,9,10p78 et 42p80 (somme)

▶ **Exercices :** 43,44,45,46,51p80 (diverses fonctions)

2. Tangente

⊛ **Activité :** 4p74 (en salle informatique ou avec les netbooks)

Définition Soit f une fonction polynôme définie sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_A.
On appelle **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point** A la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(x_A)$.

Exemple Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.
Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x_A = 3$, on calcule tout d'abord $f'(x)$:
$f'(x) = 3 \times (2x) - 2 \times (1) + 0 = 6x - 2$.
Le coefficient directeur de la tangente est donc $f'(x_A) = f'(3) = 6 \times 3 - 2 = 18 - 2 = 16$.
L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$, m étant le coefficient directeur.
Donc on a $y = 16x + p$.
Il reste à déterminer p. Pour cela on utilise le fait que la tangente passe par le point A.
Autrement dit, on a $y_A = 16x_A + p$.
Or $x_A = 3$, donc $y_A = f(x_A) = 3 \times (3^2) - 2 \times 3 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$.
Par suite, $22 = 16 \times 3 + p$, donc $22 = 48 + p$, puis $p = 22 - 48 = -26$.
Finalement, la tangente a pour équation $y = 16x - 26$.

▶ **Exercices :** 84p83 (seulement le nombre dérivé)

▶ **Exercices :** 86,87,88p83

▶ **Exercices :** 90,91p83 (lectures graphiques), 92p84

II. Fonctions rationnelles

⊛ **Activité :** QCM 6,7,8 page 96 (transformation d'expressions)

1. Fonction inverse

Propriété La fonction dérivée de la fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est la fonction f' définie sur le même ensemble par :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Exemple Soit $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$. Alors $f'(x)=0+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$.

▶ **Exercices :** 1,2,3,4,6,8p102

▶ **Exercices :** 36,38p104

2. Quotient de fonctions

⊛ **Activité :** 2p98 : la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ n'est pas $\dfrac{u'}{v'}$!

Propriété Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I, ayant pour dérivées respectivement u' et v'. On suppose que quelque soit $x\in I$, $u(x)\neq 0$.
On pose $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.
Alors la dérivée f' de f est définie sur I par : $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.
On peut écrire :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemple Soit $f(x)=\dfrac{5x^2+2}{3x-1}$, définie sur $[1;10]$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=5x^2+2$ et $v(x)=3x-1$.
On a alors $u'(x)=10x$ et $v'(x)=3$.
Par suite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{10x\times(3x-1)-(5x^2+2)\times 3}{(3x-1)^2}\\ &= \frac{30x^2-10x-15x^2-6}{(3x-1)^2}=\frac{15x^2-10x-6}{(3x-1)^2}\end{aligned}$$

▶ **Exercices :** 11,12,13,14,... p102

▶ **Exercices :** 44,45,50,51p105

3. Tangentes

Définition De même que pour les fonctions polynomiales,
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_A.
On appelle **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point** A la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(x_A)$.

▶ **Exercice :** 26p103

▶ **Exercices :** 72,73p108, 74,76p109

▶ **Exercice :** (en DM ?) 78p109