Suites

$\backsim$

Exercice 1 On considère ci-dessous quatre suites u définies pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 5n + 3 \qquad u_n = 3^n - 2 \qquad u_n = \frac{3^n + 1}{5^n} \qquad u_n = \frac{5 \times 2^n}{3^n}$$

1. Pour chacune des suites u, exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Dans deux cas, il est possible d'exprimer simplement u_{n+1} en fonction de u_n.
   (a) Trouver ces deux cas en donnant l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire alors la nature de ces deux suites.

Exercice 2

1. Rappeler une méthode pour déterminer le sens de variation d'une suite quelconque.
2. Étudier le sens de variation des suites ci-dessous :
   (a) $u_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$
   (b) $u_n = 2^n - 2n$ (pour $n \geqslant 1$)
   (c) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n}$
   (d) $u_n = \dfrac{2^n}{n(n-1)}$ (pour $n \geqslant 3$)

Exercice 3 On considère la suite u définie par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5} \text{ (pour } n \geqslant 1)$$

1. Démontrer que la suite v de terme général $v_n = u_n - \dfrac{2}{5}$ est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Calculer alors la valeur exacte de u_4.
4. Montrer que la suite u est décroissante.
5. Vers quelle valeur semblent s'approcher les termes de la suite u quand n augmente ?
   Autrement dit, quelle est la limite de u ? Il n'est pas demandé ici de justifier.
6. Déterminer le plus petit entier naturel p à partir duquel $u_n < 0{,}401$.
   On pourra pour cela utiliser la calculatrice, en expliquant la démarche.