Récurrence

∽

Exercice 1 (Rapide et classique) Démontrer les formules suivantes par récurrence :

- ⋆ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \geqslant 0)$.
- ⋆ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(n \geqslant 0)$, où $q \neq 1$.
- ⋆ La dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.
  Utiliser pour cela la formule : $(uv)' =$ _________.

Exercice 2 (Une inégalité) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant (n+1)^2$ ».

1. Pour quelles valeurs de n est-ce que $\mathcal{P}(n)$ semble vraie ?
2. Démontrer (sans récurrence) que pour tout $n \geqslant 6$, $2(n+1)^2 \geqslant (n+2)^2$.
3. Démontrer alors par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 6$.

Exercice 3 (Moins classique) On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_1 & = 2 \\ u_{n+2} & = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

On souhaite démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 2^n$.
Pour cela, démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, « pour tout $m \leqslant n$, $u_m = 2^m$ ».

Exercice 4 (Une infinité d'identités remarquables) Démontrer par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \geqslant 2,\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

Remarque : La partie délicate est la manipulation du signe Σ. On a $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j$.