Exponentielle

∽

Exercice 1 (ROC – Restitution Organisée des Connaissances)

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
   On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$.
   Démontrer (comme dans le cours) qu'une telle fonction est unique.
2. On admet ici l'existence de la fonction exponentielle, notée exp, unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et dont l'image de 0 est 1. Soit $a \neq 0$.
   (a) Trouver une fonction dérivable f qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = a$.
   (b) Démontrer qu'il n'en existe pas d'autre.
   On pourra, à partir d'une telle fonction f, définir une fonction qui vérifiera les propriétés caractéristiques de la fonction exp (Remarque : c'est aussi un moyen de répondre à la question précédente).

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes (écrire au plus une exponentielle) :

1. $\dfrac{e^x \times e^2}{\left(e^{-x}\right)^2}$
2. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer la dérivée f' de f.
3. Déterminer le signe de f' sur $\mathcal{D}_f$.
4. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 4 Faire de même que dans l'exercice précédent avec $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Exercice 5 Faire de même que dans l'exercice précédent avec $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.