**LYCÉE ALFRED KASTLER** **ACCPE TS**
**2014–2015**

# Autres questions ouvertes

**Exercice 1**
Déterminer, suivant les valeurs du réel $a$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + a$.

**Exercice 2**
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Parmi tous les rectangles ayant pour côté un segment de l'axe des abscisses et tels que deux sommets appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer que celui qui a l'aire la plus grande est celui dont un sommet a pour abscisse $x_0$ telle que $f''(x_0) = 0$.
On pourra s'aider du logiciel *GeoGebra*, en commençant par faire une figure, puis en utilisant le module de calcul formel pour les calculs.

**LYCÉE ALFRED KASTLER** **ACCPE TS**
**2014–2015**

# Autres questions ouvertes

**Exercice 1**
Déterminer, suivant les valeurs du réel $a$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + a$.

**Exercice 2**
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Parmi tous les rectangles ayant pour côté un segment de l'axe des abscisses et tels que deux sommets appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer que celui qui a l'aire la plus grande est celui dont un sommet a pour abscisse $x_0$ telle que $f''(x_0) = 0$.
On pourra s'aider du logiciel *GeoGebra*, en commençant par faire une figure, puis en utilisant le module de calcul formel pour les calculs.

**LYCÉE ALFRED KASTLER** **ACCPE TS 2014–2015**

# Autres questions ouvertes

∽

**Exercice 1**
Déterminer, suivant les valeurs du réel $a$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + a$.

**Exercice 2**
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Parmi tous les rectangles ayant pour côté un segment de l'axe des abscisses et tels que deux sommets appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer que celui qui a l'aire la plus grande est celui dont un sommet a pour abscisse $x_0$ telle que $f''(x_0) = 0$.
On pourra s'aider du logiciel *GeoGebra*, en commençant par faire une figure, puis en utilisant le module de calcul formel pour les calculs.

**LYCÉE ALFRED KASTLER** **ACCPE TS 2014–2015**

# Autres questions ouvertes

∽

**Exercice 1**
Déterminer, suivant les valeurs du réel $a$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + a$.

**Exercice 2**
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Parmi tous les rectangles ayant pour côté un segment de l'axe des abscisses et tels que deux sommets appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer que celui qui a l'aire la plus grande est celui dont un sommet a pour abscisse $x_0$ telle que $f''(x_0) = 0$.
On pourra s'aider du logiciel *GeoGebra*, en commençant par faire une figure, puis en utilisant le module de calcul formel pour les calculs.

# Aides pour l'exercice 1

| | |
|---|---|
| Se ramener à l'étude de l'équation $\mathrm{e}^x - x - a = 0$ | |
| | |
| Étudier la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - a$ | |
| | |
| Calculer la dérivée de $f$ | |
| | |
| Pour étudier le signe de $f'$, résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$ | |
| | |
| Déterminer les limites de $f$ | |
| | |
| Pour la limite en $+\infty$, factoriser par $x$ | |
| | |
| Dresser le tableau de variations de $f$ | |
| | |
| Essayer de placer 0 dans le tableau (dans les images) | |
| | |
| Utiliser le minimum de la fonction $f$ | |
| | |
| Utiliser le théorèmes des valeurs intermédiaires | |

# Aides pour l'exercice 2

| | |
|---|---|
| Exprimer l'aire $g(x)$ du rectangle en fonction de $x = OD$ | |
| | |
| Dresser le tableau de variations de $g$ | |
| | |
| Calculer la dérivée de $g$ | |
| | |
| Étudier le signe de $g'$ | |
| | |
| Dresser le tableau de variations de $g$ | |
| | |
| Déterminer l'abscisse $x_0$ du minimum de $g$ | |
| | |
| Vérifier que $f''(x_0) = 0$ | |

# Corrigé

**Exercice 1**
L'équation $\mathrm{e}^x = x + a$ est équivalente à l'équation $\mathrm{e}^x - x - a = 0$. Pour répondre à la question, on peut dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - a.$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Or,

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ et donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

La fonction $f$ est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On détermine ensuite les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x - a = +\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x - x - a = +\infty.$$

L'étude de la limite en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée. Pour la lever, on peut factoriser par $x$ : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - a = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 - \frac{a}{x}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} -1 - \dfrac{a}{x} = -1$ et, d'après la leçon, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 - \frac{a}{x} = +\infty.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on obtient finalement

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 - \frac{a}{x}\right) = +\infty.$$

On peut alors dresser la tableau de variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1-a$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après ce tableau, $1 - a$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$, et celui-ci est atteint en une seule valeur, 0.

- ⋆ Si $1 - a > 0$, c'est-à-dire si $a < 1$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- ⋆ Si $1 - a = 0$, c'est-à-dire si $a = 1$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, 0.
- ⋆ Enfin, supposons $1 - a < 0$, c'est à dire $a > 1$.
  - · $f$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ à valeurs dans $]1 - a; +\infty[$. Comme $1 - a < 0$, $0 \in ]1 - a; +\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]-\infty; 0[$.
  - · $f$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[1 - a; +\infty[$. Comme $1 - a < 0$, $0 \in [1 - a; +\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0; +\infty[$.

  On conclut que lorsque $a > 1$, l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 2**

Un rectangle satisfaisant les contraintes de l'énoncé admet nécessairement l'axe des ordonnées comme axe de symétrie (la courbe $\mathcal{C}$ étant symétrique par rapport à $(Oy)$, les parallèles à l'axe des abscisses, d'équations $y = a$, avec $a \in ]0;1[$, la coupe en deux points d'abscisses opposées).
En notant $x$ l'abscisse d'un des sommets du rectangle d'abscisse positive, on est amené à étudier la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

qui donne l'aire du rectangle en fonction de $x$.
Les résultats du module de calcul formel permettent de dresser le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

L'aire du rectangle est donc maximum lorsque $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On vérifie, toujours avec le module de calcul formel, que $f''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

# Utilisation du module de calcul formel de *Geogebra*

*Geogebra* intègre un module de calcul formel. Il est accessible par le menu *Affichage*.
On a détaillé ci-dessous, étape par étape, les commandes qui permettent de dresser le tableau de variations de la fonction $f$ étudiée dans l'exercice 1.

| | Calcul formel |
|---|---|
| 1 | Définir une fonction f. |
| 2 | f(x):=exp(x)-x-a<br>→ $\mathbf{f(x) := e^x - a - x}$ |
| 3 | Calculer la dérivée de la fonction f. |
| 4 | f'(x)<br>→ $\mathbf{e^x - 1}$ |
| 5 | Résoudre une inéquation (on écrit l'inéquation et on clique sur l'icône "Résoudre"). |
| 6 | f'(x)>0<br>Résoudre: $\{\mathbf{x > 0}\}$ |
| 7 | f'(x)<0<br>Résoudre: $\{\mathbf{x < 0}\}$ |
| 8 | Calculer une image. |
| 9 | f'(0)<br>→ $\mathbf{0}$ |
| 10 | f(0)<br>→ $\mathbf{-a + 1}$ |
| 11 | Calculer une limite (le symbole "∞" s'obtient par l'icône en bout de ligne). |
| 12 | Limite[f(x),-∞]<br>→ $\infty$ |
| 13 | Limite[f(x),+∞]<br>→ $\infty$ |