Propriété **(et définition)** Pour tout nombre réel k, il existe un unique nombre réel solution de l'équation $x^3 = k$, autrement dit un unique réel dont le cube est k.
Ce nombre est appelé racine cubique de k. Il est noté $\sqrt[3]{k}$.

Exemple On a par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ parce que $2^3 = 8$.

Au XVIème siècle, l'italien **Jérôme Cardan** (de son vrai nom *Girolamo Cardano*), confronté à la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 = px+q$ donne la formule suivante appelée **formule de Cardan** :
Si $\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27} \geq 0$, alors l'équation a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

1. On considère l'équation $x^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q ?
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
2. On considère l'équation $x^3 = 3x + 2$.
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
3. On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$.
   Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer.
   On décide malgré cela d'appliquer la formule pour voir ce qui se passe.
   Comment s'écrirait la *solution* en s'autorisant des notations habituellement interdites ?
4. *Imaginons* un nombre dont le carré est -1, et qui sera **très temporairement** noté $\sqrt{-1}$.
   En utilisant ce nombre *imaginaire* et en effectuant des calculs « habituels », montrer que

   $$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

   En déduire que $2 + \sqrt{-1}$ serait une racine cubique d'un nombre s'écrivant $2 + \sqrt{-121}$.
   « Démontrer » de même que $2 - \sqrt{-1}$ serait racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.
   Montrer alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation $x^3 = 15x+4$ donne une solution tout à fait réelle. Vérifier que le nombre obtenu est effectivement solution de l'équation.
   On a donc, en utilisant des nombres *imaginaires*, obtenu un résultat bien réel.
5. On sait que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
   Si on utilise cette égalité avec $a = b = -1$, qu'obtient-on ? Est-ce satisfaisant ?
   C'est la raison pour la quelle on n'utilisera plus jamais la notation $\sqrt{-1}$, mais que l'on définit le nombre i, **nombre imaginaire** dont le carré vaut $i^2 = -1$.
   C'est environ 150 ans après Cardan que l'on utilisera cette notation, due à **Leonhard Euler**.