Devoir maison n° 01 – mathématiques
Correction

**Exercice 1**

1. Une suite $u$ définie pour tout entier $n \geqslant n_0$ est géométrique si il existe un réel $q$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = q \times u_n$. On a alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}$.
2. Une suite $u$ définie pour tout entier $n \geqslant n_0$ est arithmétique si il existe un réel $r$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = r \times (n - n_0) + u_{n_0}$.
3. La suite $w$ définie pour $n \geqslant 0$ par $w_n = n^2$ n'est pas géométrique. En effet, $\dfrac{w_1}{w_0} = 1 \neq 4 = \dfrac{w_2}{w_1}$.
   La suite $w$ n'est pas non plus arithmétique car : $w_1 - w_0 = 0 \neq 3 = w_2 - w_1$.
4. Soit $u$ une suite qui est à la fois géométrique et arithmétique. On suppose que $u$ est définie pour tout $n \geqslant 0$. Alors il existe des réels $q$ et $r$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$ et $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q \times u_n = u_n + r$, ce qui équivaut à $(q-1)u_n = r$.
   Considérons deux cas :
   - $q = 1$ : alors $q - 1 = 0$ et alors $r = 0$. D'après les expressions explicites des suites géométriques et arithmétiques on en conclut que $u_n = u_0$. Autrement dit, $u$ est constante ($u_0$ étant un réel quelconque).
   - $q \neq 1$ : alors $q - 1 \neq 0$ et alors $u_n = \dfrac{r}{q-1}$, cela quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Or $r$ et $q$ sont des constantes, donc $u$ est constante. En particulier, $u_1 = q \times u_0 = u_0$, ce qui implique que $(q-1) \times u_0 = 0$. Or $q - 1 \neq 0$, donc nécessairement $u_0 = 0$.

   Par conséquent, si une suite est à la fois arithmétique et géométrique, alors elle est constante.
   Réciproquement, toute suite constante est à la fois arithmétique (de raison 0) et géométrique (de raison 1).
   En conclusion, les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques sont les suites constantes.

**Exercice 2** On considère les deux suites $u$ et $v$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. On observe que $w_n = 3 \times 2^n$, donc $w_n$ est de la forme $w_0 \times q^n$ avec $w_0 = 3$ et $q = 2$, donc $w$ est géométrique de raison 2.
2. On observe que $t_n = -4n + 3$, donc $t_n$ est de la forme $r \times n + t_0$ avec $t_0 = 3$ et $r = -4$, donc $t$ est arithmétique de raison $-4$.
3. En observant que $2u_n = (u_n + v_n) + (u_n - v_n) = w_n + t_n$, on a :

$$2S_n = \sum_{i=0}^{n} 2u_i = \sum_{i=0}^{n} (w_n + t_n) = \left( \sum_{i=0}^{n} w_n \right) + \left( \sum_{i=0}^{n} t_n \right)$$

   Or $\left( \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_n \right) = w_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $\left( \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_n \right) = r \times \dfrac{n(n+1)}{2} + t_0 \times (n+1)$.
   Ainsi, $S_n = \dfrac{1}{2} \left( 3\dfrac{1 - 2^{n+1}}{-1} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \right) = \dfrac{3(2^{n+1} - 1) + (-2n+3)(n+1)}{2}$.
   En développant et en simplifiant on obtient $S_n = 3 \times 2^n - n^2 + \dfrac{n}{2}$.