LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir maison n° 03 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. La proposition est vraie par définition de la limite infinie, en choisissant $A = 500$.
2. La réciproque est :

   « Si à partir d'un certain rang tous les u_n appartiennent à $]500; +\infty[$, alors u a pour limite $+\infty$ »
3. La réciproque est fausse, car la suite peut tout à fait ne pas avoir de limite, voire avoir une limite finie. Exemples :
   - $u_n = 502 + (-1)^n$, qui n'a pas de limite ;
   - $v_n = 1000$ qui est constante donc a une limite finie.

Exercice 2

1. (a) Par opérations simples sur les dérivées, à savoir somme et produit par une constante, on obtient $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)$.

   (b) Pour étudier les variations de f, on étudie tout d'abord le signe de f' sur $[2; 4]$. Ici, on peut se contenter de partir du fait que $x \geqslant 2$:

$$
\begin{aligned}
x \geqslant 2 \quad &\Rightarrow \quad x^2 \geqslant 4 \qquad \text{car la fonction carrée est croissante sur } [0; +\infty[\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[\\
&\Rightarrow \quad -\frac{4}{x^2} \geqslant -1 \qquad \text{car } -4 < 0\\
&\Rightarrow \quad 1 - \frac{4}{x^2} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \geqslant 0 \qquad \text{car } \frac{1}{2} > 0\\
&\Rightarrow \quad f'(x) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

   Puisque f' est positive sur $[2; 4]$, on en déduit que f est croissante sur $[2; 4]$.

   (c) On calcule $f(2) = \cdots = 2$ et $f(4) = \cdots = \dfrac{5}{2} < 4$.
   Puisque f est croissante sur $[2; 4]$, alors pour tout $x \in [2; 4]$, $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$.
   Donc on a bien $2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ ».
   On souhaite démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   •**Initialisation :** On a $\mathcal{P}(0)$: $2 \leqslant u_0 \leqslant 4$. Or $u_0 = 3$ et on a bien $2 \leqslant 3 \leqslant 4$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   •**Étape de récurrence :**
   On suppose que pour un entier $n \geqslant 0$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
   D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire que $u_n \in [2; 4]$. Alors d'après la question précédente on peut conclure que $2 \leqslant f(u_n) \leqslant 4$.
   Or $f(u_n) = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right) = u_{n+1}$. Donc on a bien $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   •**Conclusion :** On a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.