Devoir maison n° 04 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer **une fois** le ballon.
   On définit l'événement S (« succès ») comme étant le fait que le ballon passe dans le cercle.
   On a alors $\mathbb{P}(S) = p = 0{,}75$ d'après l'énoncé. (Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli).
   On répète $n = 20$ fois cette expérience de manière indépendante, et on s'intéresse au nombre X de succès. (Il s'agit d'un schéma de Bernoulli).
   Alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}75$. On note $X \sim \mathscr{B}(20; 0{,}75)$.
2. On utilise la calculatrice pour calculer les probabilités :
   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geqslant 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 9) \simeq 1 - 3{,}9 \times 10^{-03} \simeq 0{,}9961$$
   et
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X < 16) = \mathbb{P}(X \leqslant 15) \simeq 0{,}5852$$
3. On a $A \cap B$: « le ballon est passé par le cercle entre 10 et 15 fois inclues ».
   On peut noter aussi $A \cap B$: « $10 \leqslant X \leqslant 15$ ».
   Par suite, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 15) = \mathbb{P}(X \leqslant 15) - \mathbb{P}(X \leqslant 9) \simeq 0{,}5812$.
4. On utilise la formule : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \simeq \dfrac{0{,}5812}{0{,}5852} \simeq 0{,}9932$.
   Il s'agit de la probabilité que le ballon soit passé au moins 10 fois dans le cercle sachant qu'il y est passé strictement moins de 16 fois.

Exercice 2

1. L'individu étant choisi au hasard, la loi est équirépartie.
   On a alors : $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}_M(V) = \dfrac{2}{15}$ et $\mathbb{P}_V(M) = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$.
2. On a $\mathbb{P}_M(V) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap V)}{\mathbb{P}(M)} = \dfrac{\mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(M)}{\mathbb{P}(M)}$.
   Par conséquent : $\mathbb{P}(M) = \dfrac{\mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(M)}{\mathbb{P}_M(V)} = \cdots = \dfrac{1}{5}$.
3. On a $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{V} \cap M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \dfrac{\mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(V \cap M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \dfrac{\mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \cdots = \dfrac{13}{50}$.
4. On a $\mathbb{P}_V(M) = \dfrac{4}{50} < \dfrac{13}{50} = \mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$, donc la proportion de malades parmi les vaccinés est plus faible que la proportion de malades parmi les non vaccinés.
   On peut en conclure que le vaccin est efficace.

Exercice 3 La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x}(x+4)$ et $v(x) = x^2 + 1$.

La fonction u est de la forme gh avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x + 4$. Comme $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $h'(x) = 1$, on a : $u'(x) = (gh)'(x) = (g'h + gh')(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+4) + \sqrt{x} \times 1 = \dfrac{x + 4 + 2x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+4}{2\sqrt{x}}$.
De plus, $v'(x) = 2x$, donc :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x) \\
&= \frac{\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - \sqrt{x}(x+4)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\dfrac{(3x+4)(x^2+1) - 2x(x+4)2x}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(3x+4)(x^2+1) - 2x(x+4)2x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\
&= \frac{3x^3 + 3x + 4x^2 + 4 - (2x^2 + 8x)2x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\
&= \frac{3x^3 + 3x + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 16x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-x^3 - 12x^2 + 3x + 4}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$