LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2014–2015

Devoir maison n° 06 – mathématiques
Donné le 05/11/2014 – à rendre le 12/11/2014

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Démontrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.
3. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.
   Montrer que dans $]0;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes.
4. Démontrer que l'expression x^3+x^2+2x-1 admet une seule racine réelle α dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près. Pour la suite on pose $A=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.
5. (a) Déterminer un encadrement de A à 2×10^{-1} près en le justifiant.
   (b) Démontrer que $A=f'(\alpha)$.
6. Pour tout $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   Montrer que T_α a pour équation $y=Ax$.
7. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$, seule T_α passe par l'origine O.

LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2014–2015

Devoir maison n° 06 – mathématiques
Donné le 05/11/2014 – à rendre le 12/11/2014

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Démontrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.
3. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.
   Montrer que dans $]0;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes.
4. Démontrer que l'expression x^3+x^2+2x-1 admet une seule racine réelle α dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près. Pour la suite on pose $A=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.
5. (a) Déterminer un encadrement de A à 2×10^{-1} près en le justifiant.
   (b) Démontrer que $A=f'(\alpha)$.
6. Pour tout $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   Montrer que T_α a pour équation $y=Ax$.
7. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$, seule T_α passe par l'origine O.