LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir maison n° 06 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. Pour calculer f', on observe que f est de la forme uv, avec $u(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
   u est elle-même de la forme $\dfrac{g}{h}$ et v est de la forme e^w. Alors $u' = \dfrac{g'h - gh'}{h^2}$ et $v' = w'e^v$.
   Sans les détails complets, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) = (u'v + uv')(x) &= \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x+1}{x^2} \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

2. Puisque, quelque soit $x > 0$, $x^4 > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $1-x$.
   Or $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖	$\nearrow$	$\dfrac{3}{e}$	$\searrow$	

3. Il suffit de réécrire l'équation :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) - xf'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} - x\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x-1+x}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3+x^2+2x-1 = 0 \text{ car } \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} > 0 \end{aligned}$$

4. On définit $k(x) = x^3+x^2+2x-1$ sur $[0;+\infty[$. k est une fonction polynomiale, donc dérivable et continue sur $[0;+\infty[$. Or $k'(x) = 3x^2+2x+2$ a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 2 = 4 - 24 = -20 < 0$, donc $k'(x)$ est du signe de $3 > 0$ et k est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Or $k(0) = -1$ et $k(1) = 3$, donc $k(0) < 0 < k(1)$. Par suite, d'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution de l'équation $k(x) = 0$ sur $[O;1]$ (et sur $[0;+\infty[$ par stricte croissance de k sur cet intervalle).
   On trouve, à l'aide de la calculatrice : $0{,}39 < \alpha < 0{,}40$.
5. (a) la fonction f étant strictement croissante sur $[0;1]$, et comme $0{,}39 < \alpha < 0{,}40$, alors $f(0{,}39) < f(\alpha) < f(0{,}40)$ puis, comme $\alpha > 0$, $\dfrac{f(0{,}39)}{\alpha} < \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} < \dfrac{f(0{,}40)}{\alpha}$.
   Par suite, on a $\dfrac{1}{0{,}40} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{0{,}39}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$),

donc (les images par f étant positives) $\dfrac{f(0{,}40)}{\alpha} < \dfrac{f(0{,}40)}{0{,}39}$ et $\dfrac{f(0{,}39)}{0{,}40} < \dfrac{f(0{,}39)}{\alpha}$.

Ainsi, on a l'encadrement $\dfrac{f(0{,}39)}{0{,}40} < A < \dfrac{f(0{,}40)}{0{,}39}$. Or $\dfrac{f(0{,}39)}{0{,}40} \simeq 1{,}95$ et $\dfrac{f(0{,}40)}{0{,}39} \simeq 2{,}05$.

Ainsi, $1{,}9 < A < 2{,}1$.

(b) on sait que α est solution de $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ qui équivaut à $g(x) = 0$.
Autrement dit : $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$.
Cela équivaut à $f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = A$.

6. L'équation de T_α est de la forme $y = ax + b$ avec $a = f'(\alpha) = A$, donc $T_\alpha : y = Ax + b$.
Or le point $A(\alpha; f(\alpha))$ de $\mathscr{C}$ appartient à T_α par définition.
Donc $f(\alpha) = A\alpha + b$, puis $b = f(\alpha) - A\alpha = f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = g(\alpha) = 0$.
Ainsi on a bien $T_\alpha : y = Ax$.

7. De manière générale, $T_a : y = f'(a)x + b$ et b est tel que $f(a) = f'(a)a + b$, autrement dit $b = f(a) - af'(a) = g(a)$.
La tangente T_a passe par l'origine O si et seulement si $b = 0$, ce qui équivaut à $g(a) = 0$.
Or on a vu précédemment que l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une solution, à savoir α.
Donc T_α est bien l'unique tangente à $\mathscr{C}$ qui passe par l'origine.