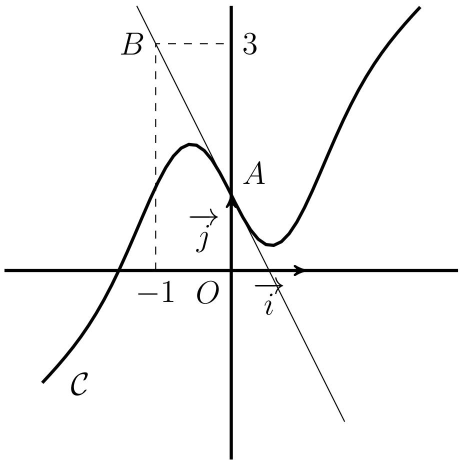
Devoir maison n° 07 – mathématiques
Donné le 19/11/2014 – à rendre le 26/11/2014

Exercice 1 Pour tout nombre complexe $z \neq -2i$, on note $Z = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1. En notant $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle de Z, $Re(Z)$.
2. Déterminer alors l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul).

Exercice 2 Sur le graphique ci-dessous on a tracé, dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 1)$ et $(-1\ ;\ 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$$

1. (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}$.
   (d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.
2. Les expressions de f et de f' étant maintenant entièrement connues :
   (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, $f(x) > 0$.
   (b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.