Devoir maison n° 07 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{(x+iy)-2+i}{(x+iy)+2i} \\
&= \frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)} \\
&= \frac{((x-2)+i(y+1))(x-i(y+2))}{x^2+(y+2)^2} \\
&= \frac{(x(x-2)+(y+1)(y+2))+i(x(y+1)-(x-2)(y+2))}{x^2+(y+2)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $Re(Z) = \dfrac{x(x-2)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$.

2. Z est imaginaire pur si et seulement si $Re(Z) = 0$, autrement dit si :

$$\begin{aligned}
\frac{x(x-2)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2} = 0 &\Leftrightarrow x(x-2)+(y+1)(y+2) = 0 \ (1) \\
&\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

(1) : Comme $z \neq -2i$, on a nécessairement $(x;y) \neq (0;-2)$, donc $x^2+(y+2)^2 \neq 0$.

L'ensemble des points M recherché est donc le cercle de centre $C\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point $(0;-2)$ (qui est sur le cercle).

Exercice 2

1. (a) Quelle que soit la valeur de a, on a $f(0) = 0+1+a\times 0\times e^{-0^2} = 1$.
Donc le point $A(0;1)$ appartient bien à $\mathcal{C}$.

(b) Puisque l'on a $A(0;1)$ et $B(-1;3)$, alors le coefficient directeur de (AB) est :
$\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{1-3}{0-(-1)} = -3$.

(c) la fonction $x \mapsto axe^{-x^2}$ est de la forme uv avec $u(x) = ax$ et $v(x) = e^{-x^2}$.
v est de la forme e^w avec $w(x) = -x^2$ donc $w'(x) = -2x$ et $v' = w'e^w$.
Alors $u'(x) = a$ et $v'(x) = -2xe^{-x^2}$
Ensuite, $(uv)' = u'v + uv'$ a pour expression $ae^{-x^2} + ax(-2x)e^{-x^2} = (a-2ax^2)e^{-x^2}$.
Finalement, $f'(x) = 1+0+(a-2ax^2)e^{-x^2} = 1-a(-1+2x^2)e^{-x^2} = 1-a(2x^2-1)e^{-x^2}$.

(d) Puisque (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, alors $f'(x_A)$ est égal au coefficient directeur de (AB), autrement dit $f'(0) = -3$.

Or $f'(0) = 1 - a(2 \times 0^2 - 1)e^{-0^2} = 1 - a(0-1) \times 1 = a$.

Donc $a = -3$.

2. (a) On a $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$. Pour tout $x \in]-1; 0]$, on a en particulier :
   - $x > -1$ donc $x + 1 > 0$.
   - $x \leqslant 0$ donc $-3x \geqslant 0$; or $e^{-x^2} > 0$, donc $-3xe^{-x^2} \geqslant 0$.

   Par suite, comme somme de deux nombres positifs (dont un strictement), $f(x) > 0$.

   (b) On a $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.

   Pour tout $x \leqslant -1$, on a $x^2 \geqslant 1^2$ par décroissance de la fonction carré sur $]-\infty; 0]$.

   Par suite, $2x^2 \geqslant 2 \Rightarrow 2x^2 - 1 \geqslant 1 \Rightarrow 3(2x^2 - 1) \geqslant 3 > 0$.

   Or $e^{-x^2} > 0$, donc $3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$, puis $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 1 > 0$.