Devoir maison n° 08 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Partie A

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} > u_n$ ».
On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence.

Initialisation

On sait que $u_1 > u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape de récurrence

On suppose que pour un certain entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_{n+1} > u_n$.
On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $u_{n+2} > u_{n+1}$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} > u_n$ et f est strictement croissante, donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$, autrement dit $u_{n+2} > u_{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

On a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_{n+1} > u_n$.
Autrement dit, u est strictement croissante.

Partie B

1. On pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 4$ ».

   On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence.

   Initialisation

   On sait que $u_0 = 0$, donc $u_0 \leqslant 4$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Étape de récurrence

   On suppose que pour un certain entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_n \leqslant 4$.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $u_{n+1} \leqslant 4$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 4$, donc $3u_n + 4 \leqslant 16$ puis, puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{3u_n+4} \leqslant \sqrt{16}$, autrement dit $u_{n+1} \leqslant 4$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion

   On a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_n \leqslant 4$.
   Autrement dit, u est majorée par 4.

2. Tout d'abord, en posant $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Or f est une fonction croissante, car f est dérivable avec $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}} \geqslant 0$.

   D'autre part, comme $u_0 = 0$, on a $u_1 = \sqrt{3u_0+4} = \sqrt{4} = 2$, donc $u_1 > u_0$.

   Ainsi, d'après la partie A, on peut affirmer que u est strictement croissante.

3. Puisque u est majorée et croissante, on en déduit que u converge.

4. (a) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n+4} = \sqrt{3l+4}$.
   Or $\sqrt{3u_n+4} = u_{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

   (b) On a ainsi $l = \sqrt{3l+4}$, donc $l^2 = 3l+4$, ce qui équivaut à $l^2 - 3l - 4 = 0$.
   On obtient une équation du second degré. On calcule $\Delta = (-3)^3 - 4\times1\times(-4) = 5^2 > 0$.
   Il y a alors deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
   Or l est positif (car u est croissante et $u_0 = 0$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = 4$.