Devoir maison n° 09 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: « tout ensemble de n nombres réels admet un maximum et un minimum. »
   initialisation :
   Tout ensemble ne contenant qu'un seul nombre x admet bien un maximum et un minimum : x est à la fois le minimum et le maximum de cet ensemble.
   En effet, quelque soit l'élément de cet ensemble (nécessairement x), il est à la fois supérieur (ou égal) et inférieur (ou égal) à x.
   Étape de récurrence :
   On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Soit donc E un ensemble de $n+1$ nombres réels, on doit démontrer que cet ensemble admet un maximum et un minimum.
   Considérons (choisissons) un nombre x quelconque de cet ensemble. L'ensemble E privé du nombre x contient n nombres réels. Alors par hypothèse de récurrence, il admet un minimum m et un maximum M.
   - Si $x < m$, alors x est un minimum de E, sinon m est encore un minimum de E.
   - Si $x > M$, alors x est un maximum de E, sinon M est encore un maximum de E.

   L'ensemble E admet donc bien un minimum et un maximum, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion :
   D'après le principe de récurrence on a démontré que quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vrai.
   Autrement dit : tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.
2. Voici l'algorithme :

```
Variables :
    N, I, x, m, M des nombres réels
Traitement :
    Saisir N
    Saisir x
    m prend la valeur x
    M prend la valeur x
    Pour I allant de 2 à N Faire
      | Saisir x
      | Si x < m Alors
      |   | m prend la valeur x
      | FinSi
      | Si x > M Alors
      |   | M prend la valeur x
      | FinSi
    FinPour
    Afficher m
    Afficher M
```

   Remarquer que l'algorithme « suit » la démonstration par récurrence, la boucle « Pour » correspondant à l'étape de récurrence.
3. Soit u une suite convergente, et soit l la limite de u. Soit $a = 1$.
   Alors par définition de convergence d'une suite, on sait qu'il existe entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-1; l+1[$, autrement dit $l-1 < u_n < l+1$.

Or l'ensemble des termes de u de rang 0 à n_0 est un ensemble fini. Il possède donc un minimum m_0 et un maximum M_0 d'après la première question de l'exercice. Ce qui fait que pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant n_0$, on a $m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0$.
Soit m le minimum entre m_0 et $l-1$, et soit M le maximum entre M_0 et $l+1$.
Alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $m \leqslant u_n \leqslant M$. Autrement dit la suite est bornée.

Exercice 2

On calcule les premières puissances de $z = \sqrt{3} - i$:

- $z^0 = 1$
- $z^1 = z = \sqrt{3} - i$
- $z^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = \cdots = 2 - 2\sqrt{3}i$
- $z^3 = (\sqrt{3} - i)^3 = \cdots = -8i$

Par suite :

- $z^4 = z \times z^3 = -8i \times (\sqrt{3} - i) = -8 - 8\sqrt{3}i$
- $z^5 = z \times z^4 = -8i \times (2 - 2\sqrt{3}i = -16\sqrt{3} - 16i$
- $z^6 = (z^3)^2 = (-8i)^2 = -64$

on observe que z^6 est la première puissance de z (hors z^0) réelle.
Soit maintenant n un entier naturel quelconque. En faisant la division euclidienne de n par 6, on peut écrire : $n = 6d + r$ avec d et r entiers naturels tels que $0 \leqslant r < 6$.
Par suite : $z^n = z^{6d+r} = (z^6)^d \times z^r$.
Or $z^6 \in \mathbb{R}$, donc $(z^6)^d \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'affirmer : $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^r \in \mathbb{R}$.
D'après les calculs précédents, étant donné que $0 \leqslant r < 6$, cela n'est possible que pour $r = 0$. Autrement dit $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 6d$, avec $d \in \mathbb{N}$.
Ce qui signifie que $z^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si n est un multiple de 6.
Les entiers naturels cherchés sont donc les multiples de 6.