Devoir maison n° 10 – mathématiques
Donné le 14/01/2015 – à rendre le 21/01/2015

Exercice 1
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ d'unité graphique :

- 2,5 cm ou 3 grands carreaux en abscisse ;
- 5 cm ou 5 grands carreaux en ordonnée.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les variations de la fonction f.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point $K\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.
   (b) Justifier que pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}$ il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
   (c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ (g'' est la dérivée de g', soit la dérivée seconde de g).
   (d) Déterminer, en justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ puis de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   (e) En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.
4. **(question facultative)**
   (a) Démontrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire que le point K défini plus haut est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
   Pour cela on pourra chercher à déterminer le milieu du segment d'extrémités les points de $\mathcal{C}$ de coordonnées respectives x et $-x$.
5. Tracer les asymptotes, la tangente T puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.