Devoir maison n° 10 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$.

   (b) On a $f(x) = \dfrac{e^x \times 1}{e^x\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}$.

   De plus, comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

   Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

   (c) On en déduit que $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes horizontales la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

2. On calcule la dérivée de f : f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$.
   Alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$, et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
   Comme un carré et une exponentielle sont toujours positifs, on en déduit que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc que f est strictement croissante.

3. (a) L'équation de T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ (0 est l'abscisse de K).
   Or $f'(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ est bien l'ordonnée de K).
   Donc $T : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

   (b) Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}$ il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{e^x - (1+e^x)\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right)}{1+e^x} > 0 \\
&\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{2}e^x > 0 \quad \text{car } 1 + e^x > 0 \\
&\Leftrightarrow 4e^x - x - 2 - xe^x - 2e^x > 0 \quad \text{car } 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow 2e^x - xe^x - x - 2 > 0
\end{aligned}$$

   Comme $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$, on voit donc qu'il suffit en effet d'étudier le signe de g.

   (c) On a (en utilisant $\exp' = \exp$ et $(uv)' = u'v + uv'$) : $g'(x) = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = -xe^x$.

   (d) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 0$, alors $g''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
   Par suite on obtient, ligne après ligne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g''(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g'		$\nearrow$	0	$\searrow$	
signe de g'		$-$	0	$-$	
variations de g		$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de g		$+$	0	$-$	

(e) Ainsi, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $]-\infty;0[$, et en dessous sur $]0;+\infty[$.

4. (a) On exprime :

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x(1+e^{-x})+e^{-x}(1+e^x)}{(1+e^{-x})(1+e^x)} \\ &= \frac{e^x+e^xe^{-x}+e^{-x}+e^{-x}e^x}{1+e^x+e^{-x}+e^{-x}e^x} \\ &= \frac{e^x+e^{x-x}+e^{-x}+e^{-x+x}}{1+e^x+e^{-x}+e^{-x+x}} \\ &= \frac{e^x+2e^0+e^{-x}}{e^x+1+e^0+e^{-x}} \\ &= \frac{e^x+2+e^{-x}}{e^x+2+e^{-x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, en divisant par 2 : $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(b) Les points $M(x,f(x))$ et $M'(-x,f(-x))$ sont par définition des points de la courbe $\mathcal{C}$.
Le segment $[MM']$ a pour milieu le point I dont les coordonnées sont :
$x_I=\dfrac{x_M+x_{M'}}{2}=\dfrac{x-x}{2}=0$ et $y_I=\dfrac{y_M+y_{M'}}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Donc $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, autrement dit $I=K$.
Cela signifie que M' est le symétrique de M par rapport au point K.
Comme M est quelconque, on déduit des faits précédents que K est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

5. Voici la courbe avec sa tangente et ses asymptotes :