

Devoir maison n° 11 – mathématiques
Donné le 21/01/2015 – à rendre le 28/01/2015

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

On se place dans un repère orthogonal $(O; I; J)$.

1. Donner une interprétation graphique de $f(3)$.
2. Justifier que f est dérivable et en donner la dérivée f' .
3. Soit $\varphi : x \mapsto \ln x - f(x)$ ($x \geq 1$). Démontrer que φ est la fonction nulle.
En déduire une expression de la fonction \ln sous forme d'intégrale.
4. On souhaite maintenant obtenir une valeur approchée du nombre $\ln 3$.

(a) Donner un algorithme permettant d'approcher le nombre $\ln(3) = \int_1^3 \frac{1}{t} dt$ par des sommes d'aires de trapèzes (algorithme vu en exercice).

L'algorithme demande uniquement une valeur N , qui est le nombre d'intervalles en lequel on découpe $[1; 3]$. L'algorithme ne doit pas utiliser de fonction extérieure (Y1 ou autre), les expressions devant être données directement dans l'algorithme.

- (b) Entrer l'algorithme dans une calculatrice ou sur ordinateur, puis l'appliquer avec $N = 50$.
Donner la valeur obtenue, avec un arrondi à 10^{-4} près.
- (c) Quelle est la valeur, arrondie à 10^{-4} près, donnée par la calculatrice pour $\ln 3$?

Exercice 2

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer que la suite v est géométrique et en préciser la raison et le premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
3. Déterminer alors la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.