Devoir maison n° 11 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

1. $f(3) = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t}dt$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe de la fonction inverse, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
2. $f(x)$ est l'intégrale sur l'intervalle $[1;x]$ de la fonction inverse qui est continue sur $[1;+\infty[$. Par conséquent d'après le cours f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. La fonction φ est dérivable et quelque soit $x \in [1;+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0$.
   Donc φ est constante sur $[1;+\infty[$. Or $\varphi(1) = \ln(1) - f(1) = 0 - 0 = 0$ ($f(1)$ est nulle car il s'agit d'une intégrale dont les bornes sont toutes deux égales à 1).
   Par conséquent, quelque soit $x \in [1;+\infty[$; $\varphi(x) = \varphi(1) = 0$ donc φ est bien la fonction nulle.
   Par suite, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.
4. (a) Un algorithme possible est le suivant :

```
Saisir N
S prend la valeur 0
B prend la valeur 1
Pour I allant de 1 à N Faire
  | A prend la valeur B
  | B prend la valeur A + 2 ÷ N
  | S prend la valeur S + 1 ÷ N × (1 ÷ A + 1 ÷ B)
FinPour
Afficher S
```

   (b) Pour $N = 50$ on obtient : $S \simeq 1{,}0987$ à 10^{-4} près.
   (c) La calculatrice donne : $\ln(3) \simeq 1{,}0986$ à 10^{-4} près.

Exercice 2

1. On a : $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{9}\right) = \ln\left(\dfrac{3\sqrt{u_n}}{9}\right) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{u_n}}{3}\right) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{u_n}{9}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{u_n}{9}\right) = \dfrac{1}{2}v_n$.
   Ainsi v est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   De plus, $v_0 = \ln\left(\dfrac{u_0}{9}\right) = \ln\left(\dfrac{9e}{9}\right) = \ln e = 1$.

2. Ainsi, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. De plus,

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right) &\Leftrightarrow e^{v_n} = \frac{u_n}{9} \\ &\Leftrightarrow u_n = 9e^{v_n} \end{aligned}$$

Donc $u_n = 9\exp\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

3. Puisque $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
   Par suite, $\lim\limits_{X\to 0} 9e^X = 9e^0 = 9$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9$.
   On peut vérifier que l'on s'approche très vite de cette limite.