

Devoir maison n° 12 – mathématiques  
Donné le 28/01/2015 – à rendre le 04/02/2015

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln x - (\ln x)^2$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

- (a) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition.  
(b) La courbe  $\mathcal{C}$  admet-elle des asymptotes ?
- Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , et préciser la valeur de l'extremum de  $f$ .
- (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.  
(b) Quelle est la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à l'axe des abscisses ?

**Exercice 2**

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$u_{n+1} = 2 + \ln u_n$$

On admet ici que la suite  $u$  est bornée par 1 et 4 (cela se démontre par récurrence).

- Démontrer par récurrence que la suite  $u$  est croissante.
- En déduire que la suite est convergente (donner seulement les arguments suffisants).  
On note  $l$  la limite de la suite  $u$ .
- Donner un algorithme permettant de calculer  $u_{20}$ .
- Après avoir rentré l'algorithme dans la calculatrice ou sur ordinateur, donner une valeur approchée de  $l$  à  $10^{-3}$  près.