LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir maison n° 12 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. (a) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   D'autre part, $f(x) = (\ln x)^2 \left(\dfrac{1}{\ln x} - 1\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

   Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) La limite en 0 étant infinie, $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. Pour étudier les variations de f, on dérive tout d'abord la fonction f.
   $x \mapsto (\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln x$.
   Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et comme $(u^2)' = 2u'u$, on a $f' = u' - 2u'u$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x} \ln x = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$.
   Comme f est définie sur $]0; +\infty[$, on a $x > 0$ donc il suffit d'étudier le signe de $1 - 2\ln x$.
   Or $1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$.
   Ainsi on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

   Comme $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} \ln e = \dfrac{1}{2}$, alors $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

   Le maximum de f est donc $\dfrac{1}{4}$.

3. (a) On doit résoudre $f(x) = 0$. Or $f(x) = \ln x(1 - \ln x)$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $\ln x = 0$ ou $\ln x = 1$, autrement dit si $x = 1$ ou $x = e$.
   Les points d'intersections entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses ont pour coordonnées (1,0) et $(e; 0)$.

   (b) Pour connaître la position relative entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses il suffit de connaître le signe de $f(x) = \ln x(1 - \ln x)$. Or ln est croissante et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$. Ainsi :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Conclusion : $\mathcal{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $[1; e]$, en-dessous ailleurs.

Exercice 2

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».
   On souhaite démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   •**Initialisation :** On doit démontrer que $\mathcal{P}(0)$: « $u_1 \geqslant u_0$ » est vraie.
   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 2 - \ln u_0 = 2 - \ln 1 = 2$ on a bien $u_1 \geqslant u_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   •**Étape de récurrence :**
   On suppose que pour un entier $n \geqslant 0$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$
   Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} \geqslant u_n &\Leftrightarrow \ln u_{n+1} \geqslant \ln u_n \quad \text{(la suite est positive car minorée par 1)} \\ &\Leftrightarrow 2 + \ln u_{n+1} \geqslant 2 + \ln u_n \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} \geqslant u_{n+1} \end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   •**Conclusion :** On a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_{n+1} \geqslant u_n$, autrement dit que u est croissante.
2. Il a été admis que u est majorée (par 4) et nous venons de démontrer que u est croissante. Donc u est convergente.
3. L'algorithme est le suivant :

```
Variables :
    u est un réel
    n est un entier
Traitement :
    u prend la valeur 1
    Pour n allant de 1 à 20 Faire
      | u prend la valeur 2 + ln u
    FinPour
    Afficher u
```

4. En appliquant l'algorithme on obtient $l \simeq 3{,}146$.