Devoir maison n° 13 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On pose $A(2)$. Alors $|z-2|=5$ équivaut à $AM=5$.
   Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 5.
2. On pose $B(1+i)$. Alors $|z-1-i|=9$ équivaut à $|z-(1+i)|=9$, donc à $BM=9$.
   Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre B et de rayon 9.
3. On pose $C(-i)$ et $D(-5+2i)$. Alors $|z+i|=|z+5-2i|$ équivaut à $CM=DM$.
   Donc l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[CD]$.

Exercice 2

1. M, N et P sont distincts deux à deux si et seulement si leurs affixes sont distinctes deux à deux. On résout alors trois équations :

$z=z^2$	$z=z^3$	$z^2=z^3$
$\Leftrightarrow z^2-z=0$	$\Leftrightarrow z^3-z=0$	$\Leftrightarrow z^3-z^2=0$
$\Leftrightarrow z(z-1)=0$	$\Leftrightarrow z(z^2-1)=0$	$\Leftrightarrow z^2(z-1)=0$
$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$	$\Leftrightarrow z(z-1)(z+1)=0$	$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$
	$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$ ou $z=-1$	

   Or $M(z)$ est distinct de A, B et O, donc $z\neq -1$, $z\neq 1$ et $z\neq 0$.
   Les points M, N et P sont bien distincts deux à deux.
2. On applique le théorème de Pythagore : Si MNP est rectange en P, alors :
$$\begin{aligned} MP^2+NP^2=MN^2 &\Leftrightarrow |z^3-z|^2+|z^3-z^2|^2=|z^2-z|^2\\ &\Leftrightarrow |z(z-1)(z+1)|^2+|z^2(z-1)|^2=|z(z-1)|^2\\ &\Leftrightarrow |z(z-1)|^2|z+1|^2+|z|^2|z(z-1)|^2=|z(z-1)|^2\\ &\Leftrightarrow |z+1|^2+|z|^2=1 \end{aligned}$$
   À la dernière étape on divise par $|z(z-1)|^2$ qui est non nul car $z\neq 0$ et $z\neq 1$.
3. Tout d'abord on rappelle que quelque soit Z, $|Z|^2=Z\overline{Z}$. Ainsi d'une part :
$$\begin{aligned} |z+1|^2+|z|^2=1 &\Leftrightarrow (z+1)\overline{(z+1)}+z\overline{z}=1\\ &\Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1)+z\overline{z}=1\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}=1\\ &\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z+\overline{z}=0 \end{aligned}$$
   Et d'autre part :
$$\begin{aligned} \left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4} &\Leftrightarrow z\overline{z}+\frac{z}{2}+\frac{\overline{z}}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}+\frac{z}{2}+\frac{\overline{z}}{2}=0\\ &\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z+\overline{z}=0 \end{aligned}$$
   Par conséquent on a bien équivalence entre les deux égalités.

4. Avec la même remarque que précédemment, et en posant $C\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow CM^2=\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow CM=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est situé sur le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
L'ensemble cherché est ce même cercle privé des points O et A (qui lui appartiennent).