Devoir maison n° 14 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(5 \leqslant T \leqslant 10) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0 \quad (E)$$

2. On pose $X = e^{-5\lambda}$. Alors :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \quad (\text{car } e^{-10\lambda} = e^{-5\lambda\times 2} = \left(e^{-5\lambda}\right)^2)\\ &\Leftrightarrow X^2 - 2\times\frac{1}{2}\times X + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow X - \frac{1}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par suite, en revenant au fait que $X = e^{-5\lambda}$,

$$\begin{aligned}(E) \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2\\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5}\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit a un réel. On commence déjà par déterminer l'équation de la tangente T à la courbe d'équation $y = \exp(x)$. En posant $f(x) = \exp(x)$, on a $T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Or $f'(x) = \exp(x)$, donc $T : y = \exp(a)(x-a) + \exp(a) = \exp(a)(x-a+1)$.
On cherche ensuite un point d'intersection entre T et l'axe des abscisses. Un tel point a pour ordonnée $y = 0$, et son abscisse satisfait donc l'équation $\exp(a)(x-a+1) = 0$.
Or $\exp(a) \neq 0$, donc l'équation équivaut à $x - a + 1 = 0 \Leftrightarrow x = a - 1$.
Ainsi, le point d'intersection recherché a pour coordonnées $(a-1; 0)$.
On observe alors que quelque soit a, le point d'intersection entre la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse a et l'axe des abscisses a pour abscisse $a - 1$.
Autrement dit l'écart entre l'abscisse du point d'abscisse a et le point d'intersection est constant, égal à 1.

Exercice 3

La négation est : « tous les campagnols s'enfuient et le renard mange ».