

Devoir maison n° 16 – mathématiques
Correction**Exercice 1****A. Une formule utile**

1. On rappelle que $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi, $uv' = (uv)' - u'v$ **(1)**.
2. Puisque l'on a supposé que u, v ainsi que leurs dérivées sont continues sur I , alors les produits uv' et $u'v$ sont continus sur I , ainsi que $(uv)'$ qui est leur somme.
3. On a :

$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad uv' = (uv)' - u'v &\Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [(uv)'(x) - u'(x)v(x)] dx \\
 &\Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\
 &\Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx
 \end{aligned}$$

En effet, (uv) est évidemment une primitive de $(uv)'$.

B. Une application guidée

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

1. Ainsi, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.
2. Par suite,

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e v'(x)u(x)dx = (uv)(e) - (uv)(1) - \int_1^e u'(x)v(x)dx \\
 &= \left(\frac{1}{2}e^2 \ln e\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 \ln 1\right) - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{1}{2}x^2 dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \times 1^2\right) \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

C. D'autres calculs

On trouve :

1. $\int_1^e \ln x dx = 1$ (on pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$).
2. $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$ (on pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, puis $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$).