Devoir maison n° 17 – mathématiques
Donné le 08/04/2015 – à rendre le 29/04/2015

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (a) Étudier les variations de f et les résumer dans un tableau complet.
(b) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f sur l'intervalle $[-3; 3]$ dans un repère orthogonal du plan tel que l'unité en ordonnée mesure le quart de l'unité en abscisse.
Note : Il s'agit de la forme prise par une chaîne suspendue à deux extrémités, comme celle que l'on peut voir sur des ponts suspendus.
- Calculer en fonction de a l'aire $\mathcal{S}(a)$ de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, avec $a > 0$.
- Démontrer que pour tout réel x , $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = 1$.
- On admet que la longueur de l'arc de la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est donnée par l'intégrale :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

En utilisant cette formule et l'égalité démontrée dans la question précédente, calculer la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0; 3]$.

Exercice 2

La réponse à la première question peut servir dans celle de la seconde.

- Déterminer une primitive de $u'\sqrt{u}$ (u étant une fonction continue et positive).
- (**facultatif**) Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe d'équation $4y^2 - x^2(4 - x^2) = 0$.
On pourra utiliser le logiciel Geogebra pour visualiser la courbe. Il suffit pour cela d'entrer son équation dans la zone de saisie.
Une utilisation du module de calcul formel de Geogebra pourra être acceptée, ainsi que certaines conjectures qui pourront être émises. Cependant des calculs et des démonstrations (ou au moins des arguments convaincants) rapporteront davantage.