LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir maison n° 17 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. (a) Calculons tout d'abord : $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

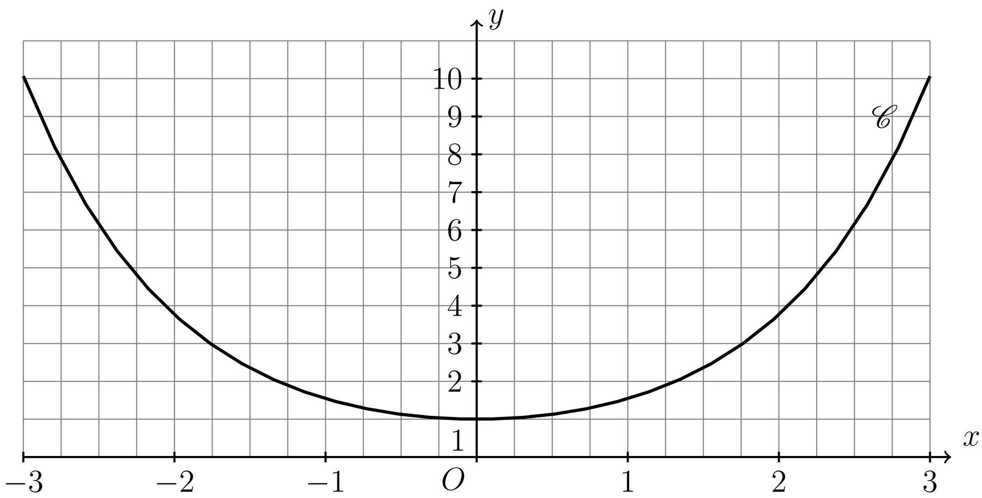
Par suite, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$.

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Les limites s'obtiennent en utilisant : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

(b) La courbe représentative est la suivante :



2. Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)dt = \int_0^a \frac{e^t + e^{-t}}{2}dt &= \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]_0^a \\ &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \\ &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \\ &= f'(a)\end{aligned}$$

3. On calcule :

$$\begin{aligned}(f(x))^2 - (f'(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + 2\,e^x\,e^{-x} + (e^{-x})^2 - (e^x)^2 + 2\,e^x\,e^{-x} - (e^{-x})^2\right) \\ &= \frac{1}{4} \times 4\,e^x\,e^{-x} = e^x\,e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1\end{aligned}$$

4. Puisque d'après la question précédente on a $1+(f'(x))^2=(f(x))^2$ et puisque $f(x)>0$, on obtient (en utilisant également la question 2) :

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_0^3 \sqrt{(f(x))^2}dx=\int_0^3 f(x)dx=f'(3)=\frac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-3}}{2}$$

Exercice 2

1. On peut vérifier que $\frac{2}{3}u\sqrt{u}$ est une primitive de $u'\sqrt{u}$.
2. On remarque que dans l'équation, x et y sont toujours au carré. Ainsi, si $(x;y)$ est un couple de solution de l'équation, il en est de même pour $(-x;y)$, $(x;-y)$ et $(-x;-y)$.
   Autrement dit la courbe est symétrique par rapport aux deux axes du repère.
   Ainsi pour connaître la surface délimitée par la courbe il suffit de multiplier par 4 celle délimitée par les axes du repère et la courbe d'équation $4y^2-x^2(4-x^2)=0$ avec x et y positifs.
   L'équation équivaut à $y^2=\frac{1}{4}x^2(4-x^2)$.
   Elle n'a de solution que si $(4-x^2)\geqslant 0$, donc $-2\leqslant x\leqslant 2$.
   Lorsque x et y sont positifs, l'équation équivaut à $y=\sqrt{\frac{1}{4}x^2(4-x^2)}=\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}$.
   On définit alors la fonction $f : x\mapsto \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}$ sur $[0;2]$.
   La fonction f est positive sur $[0;2]$ et la surface recherchée sera alors égale à 4 fois l'intégrale suivante : $\int_0^2 f(t)dt$.
   Posons $u(x)=4-x^2$. Alors $u'(x)=-2x$, et par suite $f=-\frac{1}{8}u'\sqrt{u}$.
   Il découle de la première question que f a pour primitive $F=-\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}u\sqrt{u}$.
   On a $F(x)=-\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$, et donc $F(2)=0$ et $F(0)=-\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\times 4\times\sqrt{4}=-\frac{2}{3}$
   Ainsi, $\int_0^2 f(t)dt=F(2)-F(0)=-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$.
   Finalement, l'aire totale délimitée par la courbe est $\frac{8}{3}$.