Devoir maison n° 18 – mathématiques
Donné le 06/05/2015 – à rendre le 13/05/2015

Exercice 1

Deux amis Abel (A) et Borel (B) se donnent rendez-vous place de l'Hôtel de ville entre 0 h et 1 h. Chaque ami arrive entre ces deux heures de manière indépendante et aléatoire (uniforme).
Ils conviennent que chacun, une fois arrivé et en cas d'absence de l'autre, attend 10 minutes et s'en va si l'autre n'est toujours pas présent.
L'objectif de l'exercice est de déterminer la probabilité pour que les deux amis se rencontrent.

1. Si A arrive à 0h30, dans quel intervalle doit se situer l'heure d'arrivée de B pour que les deux amis se rencontrent ?
2. Même question si A arrive à 0h10.
3. On note x l'heure d'arrivée de A et y l'heure d'arrivée de B (en heures).
   Montrer que, pour que les amis se rencontrent, on doit avoir $x - \frac{1}{6} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$ avec x et y appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
4. Représenter cette situation sur un graphique avec un repère orthonormé d'unité 6 cm, puis hachurer l'ensemble E des points de coordonnées $(x;y)$ tels que x et y soient des heures d'arrivée de A et B compatibles avec une rencontre.
5. On admet que la probabilité que A et B se rencontrent est égale à l'aire de E en unités d'aires.
   Déterminer la probabilité pour que les deux amis se rencontrent par un calcul simple utilisant des figures géométriques.
6. Exprimer l'aire de E sous la forme d'une intégrale et vérifier que l'on obtient bien la même valeur en la calculant.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;4]$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^3$.

1. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.
2. Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur $[0;4]$.
3. Exprimer alors $F(x)$ sous la forme d'une probabilité.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}_{X \geqslant 1}(X < 3)$.
5. Déterminer $E(X)$.