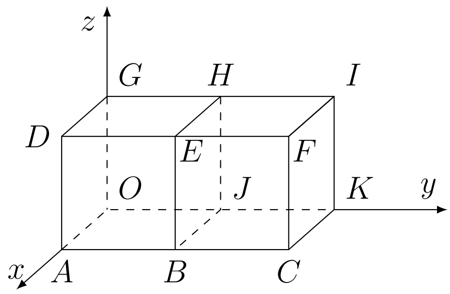
Devoir maison n° 19 – mathématiques
Donné le 13/05/2015 – à rendre le 20/05/2015

## Exercice 1




Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;2;0)$, $D(1;0;1)$, $E(1;1;1)$, $F(1;2;1)$, $G(0;0;1)$, $H(0;1;1)$, $I(0;2;1)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;2;0)$.
On obtient la figure ci-contre, où l'on admet que $ABJODEHG$ et $BCKJEFIH$ sont des cubes.

1. Pour chacune des questions suivantes répondre de deux manières différentes : une par calcul avec les coordonnées et une par raisonnement géométrique pur.
   (a) Quelle est la nature du triangle $GBI$ ?
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(KE)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $(GBK)$.

## Exercice 2

Soit $u$ une suite telle que pour tout entier $n \geqslant 4$, $\ln n \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$.
Les deux premières questions de l'exercice sont indépendantes des suivantes.

1. Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln n + \frac{1}{n}$.
3. Démontrer que pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$.
4. En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 4, $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
5. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln n}\right)_{n \geqslant 2}$ converge vers 1.