LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2014–2015

Devoir surveillé n° 1 – mathématiques
01/10/2014

Exercice 1 (5 points) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 (11 points) On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = u_n - 2n + 1 \end{cases}$$

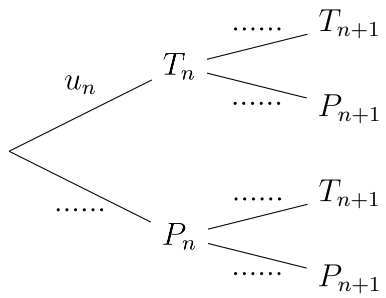
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On admet que pour tout entier n, $u_n \leqslant -\sqrt{n} + 2$.
   (a) Démontrer, à l'aide de la définition, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - 2 = +\infty$.
   (b) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n + n^2$.
   (a) Démontrer que v est une suite arithmétique.
   Préciser sa raison et calculer son premier terme.
   (b) En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n, puis que $u_n = -n^2 + 2n$.
   (c) Retrouver alors, par opérations, la limite de la suite u.

Exercice 3 (4 points) Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que :
- si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3 ;
- Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
- Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage ».

On considère alors la suite u définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \mathbb{P}(T_n)$, où $\mathbb{P}(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n. On a donc $\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(P_1) = \dfrac{1}{2}$.

1. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{T_1}(T_2)$ et calculer $\mathbb{P}_{P_1}(T_2)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
3. Recopier et compléter l'arbre suivant :



4. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.