

Devoir surveillé n°1 – mathématiques  
01/10/2014**Exercice 1**

On pose  $\mathcal{P}(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

•**Initialisation** : Soit  $n = 1$ . Alors  $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 = 1$  et  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$ .

Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

•**Étape de récurrence** : On suppose que pour un certain entier  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, autrement dit que  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

On doit démontrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, soit que  $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ . Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left( \sum_{i=1}^n i^3 \right) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

•**Conclusion** : D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, soit que  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**Exercice 2**

- On a  $u_1 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$  et  $u_2 = u_1 - 2 \times 1 + 1 = 0$ .
- (a) Soit  $A > 0$ , on cherche un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sqrt{n} - 2 > A$ . Or

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - 2 > A &\Leftrightarrow \sqrt{n} > A + 2 \\ &\Leftrightarrow n > (A + 2)^2 && \text{car la fonction carré est croissante sur } [0; +\infty[ \end{aligned}$$

On pose  $n_0 = E((A + 2)^2) + 1$ .

Alors pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $n > (A + 2)^2$  et donc  $\sqrt{n} - 2 > A$ .

Ainsi par définition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2 = +\infty$ .

- Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2 = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} + 2 = -\infty$  (par définition).

Or  $u_n \leq -\sqrt{n} + 2$ , donc par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

3. On pose, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = u_n + n^2$ .

(a) On exprime :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + (n+1)^2 - (u_n + n^2) = u_n - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 - u_n - n^2 = 2 \text{ constante.}$$

Donc  $v$  est bien arithmétique, de raison  $r = 2$ . De plus,  $v_0 = u_0 + 0^2 = 0$

(b) On en déduit  $v_n = v_0 + rn = 0 + 2n = 2n$ , et comme  $v_n = u_n + n^2$ ,  
alors  $u_n = v_n - n^2 = 2n - n^2$ .

(c) On a  $u_n = n^2 \left(-1 + \frac{2}{n}\right)$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{2}{n} = -1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ .

Donc on retrouve bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

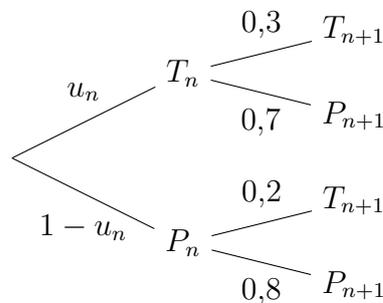
### Exercice 3

1. D'après l'énoncé on a :  $\mathbb{P}_{T_1}(T_2) = 0,3$  et  $\mathbb{P}_{P_1}(P_2) = 0,8$ . Alors  $\mathbb{P}_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$ .

2. On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_1) \times \mathbb{P}_{T_1}(T_2) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(T_2) = \dots = \frac{1}{4}.$$

3. L'arbre est le suivant :



4. On a, toujours d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1}) &= \mathbb{P}(T_n) \times \mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n \\ &= 0,1u_n + 0,2 \end{aligned}$$