LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir surveillé n° 2 – mathématiques

05/11/2014

Exercice 1 (5 points) Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de fichiers. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante : 30% de musique classique, 45% de variété, le reste étant du jazz.
Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\dfrac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\dfrac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».

1. Quelle est la probabilité que le morceau soit du classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $\mathbb{P}(H) = \dfrac{13}{20}$.
   (a) Les événements C et H sont-ils indépendants ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(J \cap H)$ et $\mathbb{P}_J(H)$.

Exercice 2 (12 points) On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.
   (a) Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
   toute trace de recherche utile sera comptée.
   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.
2. On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.
   (c) On admet que g' est strictement décroissante sur $[0; 0{,}5]$ et négative sur $[0{,}5; +\infty[$.
   Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; 0{,}5]$ (donc sur $[0; +\infty[$) puis donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.
   (d) Démontrer que g admet un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près. En donner une interprétation graphique.

Exercice 3 (3 points) Résoudre l'inéquation suivante sur $\mathbb{R}$: $e^{-2x^2}e^{4x} - 1 \geqslant 0$.