

Devoir surveillé n° 2 – mathématiques
Correction**Exercice 1**

1. Le morceau étant choisi au hasard, la loi est équirépartie.

On doit calculer $\mathbb{P}(C \cap H) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(H) = \frac{30}{100} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$.

2. (a) Les événements
- C
- et
- H
- ne sont pas indépendants car :

$\mathbb{P}_C(H) = \frac{5}{6} = \frac{50}{60} \neq \frac{39}{60} = \frac{13}{20} = \mathbb{P}(H)$. On peut aussi montrer que $\mathbb{P}(C \cap H) \neq \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(H)$.

- (b) D'après la formule des probabilités totale on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J \cap H) &= \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) - \mathbb{P}(V \cap H) \\ &= \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) - \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(H) \\ &= \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{45}{100} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) \\ &= \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{20} = 0,2 \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(V) = 1 - \frac{30}{100} - \frac{45}{100} = \frac{1}{4}$.

Par suite, $\mathbb{P}_J(H) = \frac{\mathbb{P}(J \cap H)}{\mathbb{P}(J)} = 0,2 \times 4 = 0,8$.

Exercice 2

1. (a) Déjà,
- $g(x) = f(x) - (x - 3) = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$
- . Ensuite,

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\Leftrightarrow 5e^{-x} - 3e^{-2x} > 0 \\ &\Leftrightarrow 5e^{-x} > 3e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow 5e^{-x}e^{2x} > 3 \quad (e^{2x} > 0) \\ &\Leftrightarrow e^x > \frac{3}{5} \quad (5 > 0) \end{aligned}$$

Or, quelque soit $x \geq 0$ on a $e^x \geq e^0$ (car exp est strictement croissante) autrement dit $e^x \geq 1$. Ainsi, quelque soit $x \in [0; +\infty[$, on a $e^x \geq 1 > \frac{3}{5}$ et donc $g(x) > 0$.

- (b) La courbe
- \mathcal{C}_f
- et la droite
- \mathcal{D}
- ont un point commun si et seulement si il existe un réel
- x
- tel que
- $f(x) = x - 3$
- , autrement dit tel que
- $f(x) - (x - 3) = 0$
- , soit
- $g(x) = 0$
- .

Or d'après la question précédente, $g(x) > 0$. Donc la courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} n'ont pas de point commun.

2. (a) Graphiquement,
- $|g(x)| = |f(x) - (x - 3)|$
- est la distance entre
- $M(x; f(x))$
- et
- $N(x; x - 3)$
- . En effet :

$$MN = \sqrt{(x - x)^2 + (f(x) - (x - 3))^2} = \sqrt{(f(x) - (x - 3))^2} = |f(x) - (x - 3)| = |g(x)|.$$

Or $g(x) > 0$, donc $|g(x)| = g(x)$. La distance MN est bien égale à $g(x)$.

- (b) Pour tout
- x
- de l'intervalle
- $[0; +\infty[$
- , on a
- $g'(x) = -5e^{-x} + 6e^{-2x}$
- .

Pour cela on utilise la formule $(e^u)' = u'e^u$.

(c) Sur l'intervalle $[0; 0,5]$:

- g' est continue, car obtenue par opérations simples à partir de fonctions continues (la fonction exponentielle) ;
- g' est strictement décroissante ;
- De plus, $g'(0) = 1$ et $g'(0,5) \simeq -6$ donc $g'(0,5) < 0 < g'(0)$.

Alors, d'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $[0; 0,5]$ solution de l'équation $f'(x) = 0$.

On trouve, à l'aide de la calculatrice, $\alpha \simeq 0,182$.

De manière exacte, $\alpha = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$.

(d) D'après l'énoncé, on peut déduire des questions précédentes que $g'(x)$ est positive sur $[0; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; +\infty[$. Ainsi, g admet bien un maximum en α . Ce maximum vaut $g(\alpha) \simeq 2,08$ (valeur exacte : $\frac{25}{12}$).

Cela signifie que la distance maximale entre un point de la courbe \mathcal{C}_f et le point de la droite \mathcal{D} de même abscisse x est atteinte pour $x = \alpha$ et vaut environ 2,08.

Exercice 3

On a :

$$\begin{aligned} e^{-2x^2} e^{4x} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-2x^2} e^{4x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-2x^2+4x} \geq e^0 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + 4x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2x(x-2) \geq 0 \end{aligned}$$

L'expression $-2x^2 + 4x$ est polynomiale de second degré avec $a = -2 < 0$ et a pour racines 0 et 2.

L'expression est donc positive entre les racines.

Ainsi, $\mathcal{S} = [0; 2]$.