DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 19 novembre 2014

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z :
$$(E) \quad z^2 - z\overline{z} - 1 = 0$$
Proposition : l'équation (E) admet au moins une solution.
3. Soit a et b les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 3 = 0$.
Proposition : Le nombre $a - b$ est un nombre réel.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition : Si $z\overline{z} = 1$, alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.
5. On note, pour tout nombre complexe z, $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels.
Proposition : L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que z^2 est imaginaire pur est la réunion de deux droites.

Exercice 2 (5 points)
On désigne par (E) l'équation
$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$
d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
2. On désigne par a le nombre complexe $a = 1 + i\sqrt{3}$.
   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
Démontrer que :
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors $\overline{z}$ est également une solution de (E).
5. En déduire les solutions de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Exercice 3 (5 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables :
  n est un entier naturel
  u est un réel
Entrée :
  n prend la valeur 1
  u prend la valeur 1,5
Traitement :
  Tant que $n < 9$ Faire
    u prend la valeur ....
    n prend la valeur ....
  FinTant
Sortie :
  Afficher u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des pointillés.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,206 3	0,169 3	...	0,010 2	0,010 1

   Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0{,}5)^n}{n}$.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0{,}5n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0{,}001$.

Exercice 4 (5 points)
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
   (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
   (d) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g.
   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
   (b) Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g.
4. **Restitution organisée de connaissances**
   La question est indépendante de ce qui précède. On admet la proposition encadrée ci-dessous.

   > Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et si a et b sont des réels, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' : x \mapsto af'(ax+b)$.

   Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
   Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$, puis en déduire que f ne s'annule pas.