

Devoir surveillé n° 4 – mathématiques
10/12/2014**Exercice 1 (15 points)**

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{8}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2n-1}{3n(n+1)} + \frac{1}{3}u_n \end{cases} .$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.
(b) On admet ici que la suite u est décroissante. Que peut-on en déduire pour la suite u ?
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
 - (a) Démontrer que la suite v est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme v_1 .
 - (b) Déterminer alors l'expression explicite de v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n} + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
 - (d) Déterminer finalement la limite de la suite u .
 - (e) En utilisant son expression explicite en fonction de n , justifier que la suite u est effectivement décroissante.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = -2x + 4$.

1. Justifier que f est positive sur $[-1; 1]$.
2. Faire une représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
3. Donner l'interprétation graphique de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 f(t)dt$ puis la représenter.
4. Calculer la valeur de I .