Devoir surveillé nº 4 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».
Initialisation :
Avec $n = 1$, on a $u_1 = \dfrac{8}{3} > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Étape de récurrence :
On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $u_n > 0$, et on doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $u_{n+1} > 0$.
Or $u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{3n(n+1)} + \dfrac{1}{3}u_n$.
Comme $n \geqslant 1$, alors $2n \geqslant 2$ et $2n - 1 \geqslant 1 > 0$. De même, $3n(n+1) > 0$, et par hypothèse de récurrence $u_n > 0$.
Alors, par quotient et somme de nombres positifs, $u_{n+1} > 0$.
Autrement dit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
On a démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit que $u_n > 0$.

(b) On admet ici que la suite u est décroissante.
D'après la question précédente on peut également affirmer que u est minorée (par 0).
On en déduit que u est convergente.

2. (a) On exprime :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} &= \frac{2n-1}{3n(n+1)} + \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{3}u_n + \frac{2n-1-3n}{3n(n+1)} \\
&= \frac{1}{3}u_n + \frac{-n-1}{3n(n+1)} \\
&= \frac{1}{3}u_n + \frac{-1}{3n} \\
&= \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3}v_n
\end{aligned}$$

Ainsi v est arithmétique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
Son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{1}{1} = \dfrac{8}{3} - 1 = \dfrac{5}{3}$.

(b) D'après la question précédente on peut écrire que $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(c) Comme $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$, alors $u_n = \dfrac{1}{n} + v_n = \dfrac{1}{n} + 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. De plus, $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 + 0 = 0$.

(e) On exprime :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{n} + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
&= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

n étant un entier positif, on observe alors que $u_{n+1} - u_n < 0$ comme somme de deux nombres négatifs. On en déduit bien que u est décroissante.

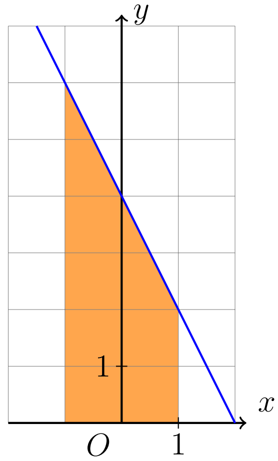
Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant x \leqslant 1 &\Leftrightarrow -2 \leqslant -2x \leqslant 2 \quad (-2 < 0) \\
&\Leftrightarrow 2 \leqslant -2x + 4 \leqslant 6
\end{aligned}$$

Donc quelque soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geqslant 0$.
Autre manière de justifier : f est affine avec un coefficient directeur négatif ($a = -2 < 0$), donc f est décroissante. De plus, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, donc quelque soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geqslant 0$.

2. La figure est la suivante :



3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. Elle est représentée en orange sur le graphique.

4. Il s'agit de l'aire d'un trapèze rectangle :

$$J = \frac{(l_1 + l_2)h}{2} = \frac{(f(-1) + f(1)) \times (1 - (-1))}{2} = \frac{(2+6) \times 2}{2} = 8 \text{ u.a}$$