LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2014–2015

Devoir surveillé n° 5 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. On veut $\mathbb{P}\left(-\frac{5}{3} \leqslant X \leqslant \frac{5}{2}\right) \simeq 0{,}946$.
2. On veut $\mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{5}{2}\right) \simeq 0{,}5 - 0{,}49379 \simeq 0{,}006$.
3. On veut $\mathbb{P}_{X\geqslant 0}\left(X \leqslant \frac{5}{2}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{5}{2}\right)}{\mathbb{P}(X \geqslant 0)} \simeq \dfrac{0{,}49379}{0{,}5} \simeq 0{,}988$.
4. On résout :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 0{,}9 &\Leftrightarrow 2 \times \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant u) = 0{,}9\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant u) - \frac{1}{2} = 0{,}45\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant u) = 0{,}95\end{aligned}$$

   On obtient alors $u \simeq 1{,}645$.

Exercice 2

1. L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, et la fraction n'est définie pour tout $x \neq 0$, donc f est bien définie sur $I =]0; +\infty[$.
2. La limite en 0 est la limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)e^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

   D'autre part, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \times 0 = 0$.

   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ en 0 et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
3. f est de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right) h$ avec $u(x) = x + 1$, $v(x) = x$ et $h(x) = e^{-x}$.

   La fonction h est elle-même de la forme e^g avec $g(x) = -x$. Alors $h'(x) = g'(x)e^{g(x)} = -e^{-x}$.

   On a de plus $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

   Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' \times h + \left(\dfrac{u}{v}\right) \times h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}h + \dfrac{u}{v}h'$. Donc :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x - (x+1)}{x^2}e^{-x} - \frac{x+1}{x}e^{-x}\\ &= \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{x+1}{x}\right)e^{-x}\\ &= -\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-x}\end{aligned}$$

4. Puisque $x \in I$, on a $x > 0$. Comme une exponentielle est toujours positive, on en conclut que $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-x} > 0$ (comme sommes, produits et quotient de termes positifs), et finalement que $f(x) < 0$ (on multiplie par -1).

   Par conséquent f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et on obtient :

x	0		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0

Exercice 3 L'algorithme est le suivant :

Variables :
- n est un entier
- u est un réel

Traitement :
- n prend la valeur 1
- u prend la valeur 10
- Tant que $u \geqslant 10^{-3}$ Faire
  - u prend la valeur $0{,}9 \times u - 1 \div n^2$
  - n prend la valeur $n + 1$
- FinTant

Sortie :
- Afficher n

Quand on applique l'algorithme on trouve $n = 74$.