BAC BLANC
24 février 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Le sujet comporte trois annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de **l'annexe 1 (à rendre avec la copie)**.
   c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   La suite (r_n) est-elle convergente ?
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.

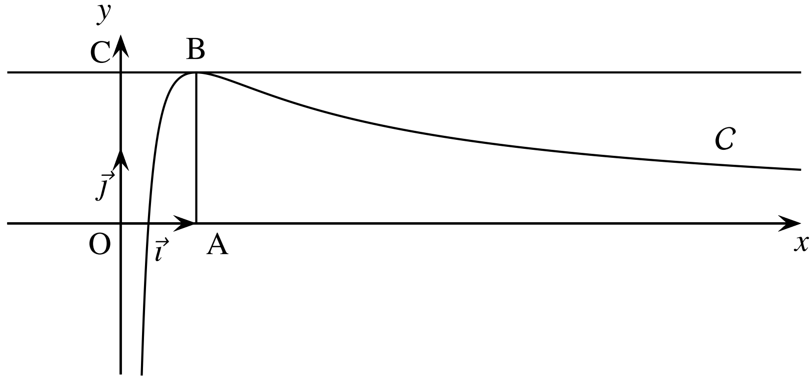
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc. Ainsi

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- ⋆ les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 2)$;
- ⋆ la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- ⋆ il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1) a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$$

c) En déduire les réels a et b.

2) a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x}.$$

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4) On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables
    a, b et m sont des nombres réels
Traitement
    a Prend la valeur 0
    b Prend la valeur 1
    Tant que b − a > 0,1 Faire
        m Prend la valeur 1/2 (a + b)
        Si f(m) < 1 Alors
            a Prend la valeur m
        Sinon
            b Prend la valeur m
        FinSi
    FinTantQue
Sorties
    Afficher a
    Afficher b
```

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau de **l'annexe 2 (à rendre avec la copie)**.

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

- ⋆ M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme » ;
- ⋆ C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1) a) Montrer que $P(M \cap C) = 0{,}03$.
   b) Calculer $P(C)$.
2) On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1) Définir la loi de la variable aléatoire X.
2) Déterminer $P(X = 35)$.
3) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

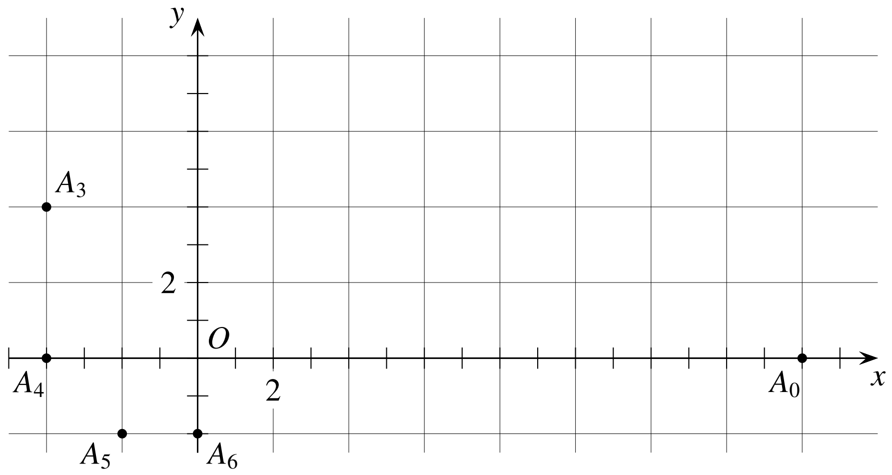
On donne en **annexe 3** la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Placer sur le graphique donné en **annexe 3 (à rendre avec la copie)** en utilisant la courbe C_f et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.
   Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

ANNEXE 1 (EXERCICE 1)



ANNEXE 2 (EXERCICE 2)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b - a$					
m					

ANNEXE 3 (EXERCICE 4)