BAC BLANC
MATHÉMATIQUES
Mardi 24 février 2015

Correction

Exercice 1

1. (a) $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16 = 8 + 8\mathrm{i}$.

   $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)(8+8\mathrm{i}) = 4 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 4 = 8\mathrm{i}$.

   $z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 = 8\mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = 4\mathrm{i} - 4 = -4 + 4\mathrm{i}$.

   (b) Voir l'annexe.

   (c) Si $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ alors $|z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   On cherche alors θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Ainsi $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

   (d) $OA_0 = |z_0| = r_0 = 16$;

   $OA_1 = |z_1| = r_1 = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$;

   $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8\mathrm{i} - 16| = |-8 + 8\mathrm{i}| = 8\sqrt{2}$.

   On a donc $OA_1 = A_0A_1$, ce qui signifie que le triangle est isocèle en A_1.

   D'autre part $\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 16^2$, donc $A_0A_1^2 + \mathrm{O}A_1^2 = \mathrm{O}A_0^2$:

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1.

   En conclusion, le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. On a :

$$\begin{aligned}
r_{n+1} = |z_{n+1}| &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n\right| \\
&= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| \quad \text{(le module du produit est égal au produit des modules)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n
\end{aligned}$$

   $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n$ montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Par suite, $r_n = r_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 16\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

   Comme $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ et la suite converge vers 0.

   Comme $r_n = |z_n| = \mathrm{O}A_n$, cela signifie que la limite des points A_n est le point O.

3. (a) Quel que soit le naturel n :

$$\begin{aligned}
A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n - z_n\right| \\
&= \left|z_n\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right)\right| = \left|z_n\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right)\right| \\
&= \left|\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) L_n est donc la somme des n (sauf r_0) premiers termes de la suite géométrique (r_n).

Donc $L_n = r_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = 8\sqrt{2}\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

(c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{16}{\sqrt{2}-1} = \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 16\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Exercice 2

1. (a) On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB), qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle). On a :

   $$f'(x) = \frac{\left(0 + b\times\dfrac{1}{x}\right)\times x - (a + b\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{b-(a+b\ln x)}{x^2}$$

   Soit effectivement : $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   (c) On en déduit : $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le 1.(a), $f(1) = 2$, donc $a = 2$.

   Du coup, on a $f'(1) = \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = b - 2$, or d'après le 1.(a), $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. (a) On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a : $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}\times(-\ln x)$.

   Puisque pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Quand x tend vers 0 : $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{x\to0} 2 + 2\ln x = -\infty$.

   Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.

   Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (c) On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, qui sera notée α.

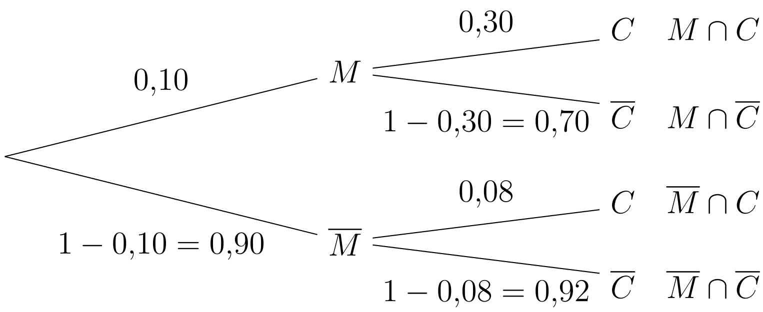
(b) Grâce à la calculatrice, on peut trouver une valeur approchée de β, et on observe alors que obtient $5 < \beta < 6$. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4. (a) Voir l'annexe.

   (b) Cet algorithme renvoie les deux bornes obtenues pour encadrer le nombre α par dichotomie, avec une amplitude au plus égale à 0,1.

   (c) Pour que l'algorithme donne un encadrement de β avec la même précision, il faut modifier l'initialisation, en mettant :
   Affecter à a la valeur 5.
   Affecter à b la valeur 6.
   Puis, dans le traitement, modifier le test « Si » pour qu'il soit : « Si $f(m) > 1$ », afin de prendre en compte la décroissance de f sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$.
   (Une autre possibilité serait d'affecter 6 à a et 5 à b, et de modifier le « tant que » pour avoir « tant que $a - b > 0{,}1$ » et alors a serait la borne haute de l'encadrement, et b la borne basse).

Exercice 3
Partie A
En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. (a) $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$

   (b) D'après la formule des probabilités totales :
   $P(C) = P(M \cap C) + P(\overline{M} \cap C)$
   $\quad = P(M) \times P_M(C) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(C) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}9 \times 0{,}08 = 0{,}03 + 0{,}072 = 0{,}102$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
   $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}102} \simeq 0{,}2941$

Partie B

1. On peut considérer que choisir au hasard un échantillon de 400 personnes peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.
   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0{,}1$ d'après le texte.
   Il s'agit donc de la répétition, $n = 400$ fois et de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}1$.
   Ainsi la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400; 0{,}1)$, $P(X = 35) = \dbinom{400}{35}\ 0{,}1^{35}(1 - 0{,}1)^{400-35}$;
   le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,049 1.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.
D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \simeq 0{,}035\,7$, donc $P(X \geqslant 30) \simeq 0{,}964\,3$.

Exercice 4
Partie A

1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x\left(-1 \times e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$
Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$, expression affine avec $a = -1 < 0$ qui s'annule en 1. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1}$.
D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

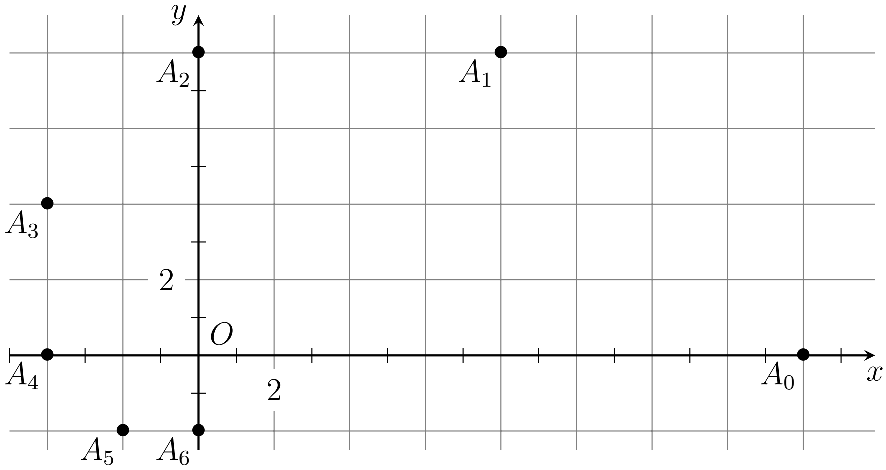
Partie B

1. Voir l'annexe.
2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.
   - $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p > 0$.
   Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, $xe^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$.
   Or $u_{p+1} = f(u_p)$ et $u_p > 0$ (hypothèse de récurrence) ; donc $f(u_p) > 0$ et donc $u_{p+1} > 0$.
   La propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Pour tout réel $x > 0$:
$$\begin{aligned} -x < 0 &\Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \quad \text{croissance de la fonction exponentielle}\\ &\Leftrightarrow e^{-x} < 1\\ &\Leftrightarrow xe^{-x} < x \quad \text{car } x > 0\\ &\Leftrightarrow f(x) < x \end{aligned}$$
Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) < x$; or, pour tout n, $u_n > 0$ donc $f(u_n) < u_n$ ce qui veut dire que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. (a) La suite u est décroissante, minorée par 0, donc d'après la suite u est convergente.
   (b) On résout l'équation $xe^{-x} = x$:
   $$\begin{aligned} xe^{-x} = x \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - 1\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} - 1 = 0\\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$
   Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

ANNEXE

EXERCICE 1



EXERCICE 2

Rigoureusement, si l'on considère l'étape 1 comme l'initialisation :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m		0,5	0,25	0,375	0,4375

on acceptera cependant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	
$f(m)$	$\simeq 1{,}23$	$\simeq -3{,}09$	$\simeq 0{,}10$	$\simeq 0{,}79$	$\simeq 1{,}03$

Une ligne a été ajoutée pour indiquer les images obtenues.

EXERCICE 4