Devoir surveillé n° 7 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On résout :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 5) = 0{,}325 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}325 \\ &\Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0{,}325 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}325}{5}\end{aligned}$$

   On remarque que $\lambda \simeq 0{,}2247$, arrondi à 0,225 dans l'énoncé.

2. On doit calculer $\mathbb{P}(X < 8) = 1 - \mathrm{e}^{-8\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-8\times 0{,}225} \simeq 0{,}83$.
3. On doit calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X>3}(X > 8) &= \mathbb{P}_{X>3}(X > 3+5) \\ &= \mathbb{P}(X > 5) \quad \text{(propriété de durée de vie sans vieillissement)} \\ &= \mathrm{e}^{-5\lambda} = \mathrm{e}^{-5\times 0{,}225} \simeq 0{,}32\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On a $I(0;0;0.5)$, $J(1;0{,}5;0)$ et $K(0{,}5;0{,}5;1)$.
2. On a $C(1{,}1{,}0)$ et $E(0{,}0{,}1)$ Par suite $\overrightarrow{CE}(x_E - x_C; y_E - y_C; z_E - z_C)$, soit $\overrightarrow{CE}(-1,-1{,}1)$.
   La droite passant par C et étant dirigée par $\overrightarrow{CE}$ on obtient alors :

$$(CE) : \begin{cases} x = 1 - 1t_d \\ y = 1 - 1t_d \\ z = 0 + 1t_d \end{cases}, t_d \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad (CE) : \begin{cases} x = 1 - t_d \\ y = 1 - t_d \\ z = t_d \end{cases}, t_d \in \mathbb{R}$$

3. On rappelle que l'on a $I(0;0;0{,}5)$ et $J(1;0{,}5;0)$. Par suite $\overrightarrow{IJ}(1;0{,}5;-0{,}5)$.
   On obtient le système paramétrique suivant pour la droite (IJ) :

$$(IJ) : \begin{cases} x = t'_d \\ y = 0{,}5t'_d \\ z = 0.5 - 0{,}5t'_d \end{cases}, t'_d \in \mathbb{R}$$

   - On cherche l'intersection éventuelle entre les droites (CE) et (IJ).
     Autrement dit on cherche un couple (t_d, t'_d) tel que :

$$\begin{cases} 1 - t_d &= t'_d \\ 1 - t_d &= 0{,}5t'_d \\ t_d &= 0{,}5 - 0{,}5t'_d \end{cases}$$

     Des deux premières lignes on obtient que nécessairement $t'_d = 0{,}5t'_d$, donc $t'_d = 0$.
     Alors toujours avec les deux premières lignes on obtient $1 - t_d = 0$, donc $t_d = 1$.
     Or la troisième ligne devient alors $1 = 0{,}5 - 0{,}5 \times 0 = 0{,}5$ et est fausse.
     Donc le système n'a pas de solution, et les deux droites (IJ) et (CE) ne sont pas sécantes.
   - De plus, les vecteurs $\overrightarrow{CE}(-1,-1{,}1)$ et $\overrightarrow{IJ}(1;0{,}5;-0{,}5)$, dirigeant respectivement les droites (CE) et (IJ), ne sont pas colinéaires. En effet, $\dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{-1}{0{,}5}$.
     Donc les droites (CE) et (IJ) ne sont pas parallèles.

- Finalement, on peut affirmer que les droites (CE) et (IJ) ne sont pas coplanaires.

4. Les droites (IJ) et (EC) sont coplanaires à condition que les quatre points I, J, E et C le soient, donc que $J \in (ICE)$.
   Or d'après les propriétés du cube, $(AE)//(BF)$ et $(BF)//(CG)$, donc $(AE)//(CG)$.
   Par conséquent, (AE) et (CG) déterminent un plan : le plan (ACE).
   De plus, $I \in [AE]$ donc $(ICE) = (ACE)$.
   La question revient alors à savoir si $J \in (ACE)$, ce qui n'est pas le cas car J est le milieu de $[BC]$, donc $J \in (ABC)$, et l'intersection de (ACE) et (ABC) est la droite (AC), à laquelle J n'appartient pas.

5. Le plan $\mathcal{P}$ est déterminé par le point $A(0{,}0{,}0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{AF}(1{,}0{,}1)$ et $\overrightarrow{AH}(0{,}1{,}1)$.
   Par conséquent, un système paramétrique de $\mathcal{P}$ est :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 0 + 1t + 0t' \\ y = 0 + 0t + 1t' \\ z = 0 + 1t + 1t' \end{cases}, \ (t,t') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} : \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = t + t' \end{cases}, \ (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

6. La question revient à déterminer les coordonnées de L dans le repère.
   Or par définition L est l'intersection de (CE) et $\mathcal{P}$. Ses coordonnées satisfont donc à la fois les systèmes paramétriques de (CE) et $\mathcal{P}$. On cherche donc (t_d,t,t') tel que :

$$\begin{cases} 1 - t_d &= t \\ 1 - t_d &= t' \\ t_d &= t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 1 - t_d & (L_1) \\ t' &= t & (L_1 - L_2) \\ t_d &= 2(1 - t_d) & \text{(substitution)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= 1 - t_d \\ t' &= t \\ t_d &= 2 - 2t_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 1 - t_d \\ t' &= t \\ 3t_d &= 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= 1 - t_d \\ t' &= t \\ t_d &= \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \\ t' &= \dfrac{1}{3} \\ t_d &= \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

   En remplaçant les valeurs de t_d dans le système de (CE) ou de (t,t') dans celui de $\mathcal{P}$, on trouve alors $L\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$. Autrement dit, $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.