DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 29 avril 2015

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4\mathrm{i} = 0$ admet une solution unique.
3. **Affirmation 3 :**
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
4. **Affirmation 4 :**
   L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (5 points)

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + \sqrt{3}v_n \end{cases}.$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.
2. On souhaite construire un algorithme qui affiche u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

   (a) On donne l'algorithme suivant :

```
Entrée :
    N est un nombre entier
Variables :
    K est un nombre entier
    S est un nombre réel
    T est un nombre réel
Initialisation :
    S prend la valeur 1
    T prend la valeur 0
    K prend la valeur 0
Traitement :
    Tant que K < N Faire
      | S prend la valeur √3S − T
      | T prend la valeur S + √3T
      | K prend la valeur K + 1
    FinTant
Sortie :
    Afficher S
    Afficher T
```

   Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

(b) L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n$.
On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = az_n.$$

(b) Écrire a sous forme exponentielle.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_n &= 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n &= 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Exercice 3 (7 points)
La partie C est indépendante des parties A et B.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de $0{,}01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$ et éclaircie si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \simeq 0{,}45$.
L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

(a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$.

(b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

(c) Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
Variables :
    x (nuance initiale)
    y (nuance retouchée)
    E (écart)
    c (compteur)
    k
Initialisation :
    c prend la valeur 0
Traitement :
    Pour k allant de 0 à 100 Faire
        x prend la valeur k/100
        y prend la valeur f(x)
        E prend la valeur |y − x|
        Si E ⩾ 0,05 Alors
            c prend la valeur c + 1
        FinSi
    FinPour
Sortie :
    Afficher c
```

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

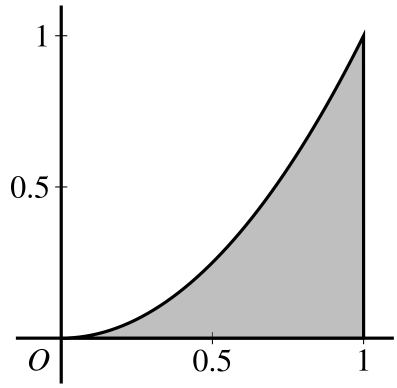
(Suite de l'exercice page suivante)

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_3(x) = x\,\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. (a) Calculer $\mathcal{A}_{f_3}$.
   (b) Calculer $\mathcal{A}_{f_4}$.
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Exercice 4 (4 points)

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.

À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.

On note L l'événement « La puce est livrée ».

On note C l'événement « La puce a une durée de vie courte ».

Étant donné deux événements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   (a) Donner la valeur $P_L(C)$.
   (b) Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?
   (c) Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaîne de fabrication ?

   Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003. On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées.

   On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0{,}003$.
   (b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
   (c) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1