

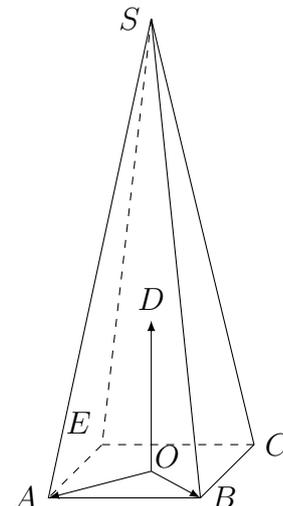
## Amérique du nord – 2 juin 2015

**Exercice 1 (5 points)**

On considère une pyramide  $SABCE$  à base carrée  $ABCE$  de centre  $O$ . Soit  $D$  le point de l'espace tel que  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$  soit un repère orthonormé. Le point  $S$  a pour coordonnées  $(0; 0; 3)$  dans ce repère.

**Partie A**

1. Soit  $U$  le point de la droite  $(SB)$  de cote 1.  
Construire le point  $U$  sur la figure.
2. Soit  $V$  le point d'intersection du plan  $(AEU)$  et de la droite  $(SC)$ .  
Montrer que les droites  $(UV)$  et  $(BC)$  sont parallèles. Construire le point  $V$  sur la figure.
3. Soit  $K$  le point de coordonnées  $(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0)$ . Montrer que  $K$  est le pied de la hauteur issue de  $U$  dans le trapèze  $AUVE$ .

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère  $AUVE$  est  $\frac{5\sqrt{43}}{18}$ .

1. On admet que le point  $U$  a pour coordonnées  $(0; \frac{2}{3}; 1)$ .  
Vérifier que le plan  $(EAU)$  a pour équation  $3x - 3y + 5z - 3 = 0$ .
2. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(d)$  orthogonale au plan  $(EAU)$  passant par le point  $S$ .
3. Déterminer les coordonnées de  $H$ , point d'intersection de la droite  $(d)$  et du plan  $(EAU)$ .
4. Le plan  $(EAU)$  partage la pyramide  $(SABCE)$  en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

**Exercice 2 (5 points)**

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel  $n$ , on définit les points  $(A_n)$  par leurs coordonnées  $(x_n; y_n)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points  $A_0, A_1$  et  $A_2$ .  
(b) Pour construire les points  $A_n$  ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

**Variables :**

$i, x, y, t$  : nombres réels

**Initialisation :**

$x$  prend la valeur  $-3$

$y$  prend la valeur  $4$

**Traitement :**

Pour  $i$  allant de 0 à 20 Faire

    Construire le point de coordonnées  $(x; y)$

$t$  prend la valeur  $x$

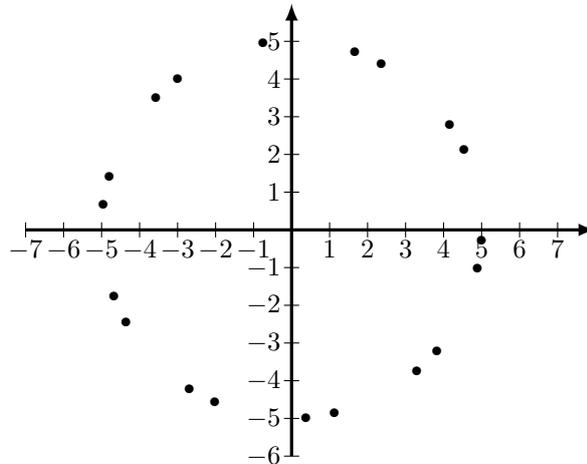
$x$  prend la valeur .....

$y$  prend la valeur .....

FinPour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points  $A_0$  à  $A_{20}$ .

(c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$ . On les nommera sur la figure.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points  $A_n$  pour tout  $n$  entier naturel ?

2. On souhaite construire géométriquement les points  $A_n$  pour tout  $n$  entier naturel. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = x_n + iy_n$  l'affixe du point  $A_n$ .
  - (a) Soit  $u_n = |z_n|$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 5$ . Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
  - (b) On admet qu'il existe un réel  $\theta$  tel que  $\cos(\theta) = 0,8$  et  $\sin(\theta) = 0,6$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$ .
  - (c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = e^{in\theta} z_0$ .
  - (d) Montrer que  $\theta + \frac{\pi}{2}$  est un argument du nombre complexe  $z_0$ .
  - (e) Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer, en fonction de  $n$  et  $\theta$ , un argument du nombre complexe  $z_n$ . Représenter  $\theta$  sur la figure. Expliquer, pour tout entier naturel  $n$ , comment construire le point  $A_{n+1}$  à partir du point  $A_n$ .

**Exercice 3 (4 points)**

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

**Partie A Contrôle avant la mise sur le marché**

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu = 100$  et d'écart-type  $\sigma = 1$ . Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de  $\sigma$ .

1. Calculer la probabilité de l'événement  $M$  : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.  
Déterminer la valeur de  $\sigma$  pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

### Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7%. On dit alors que la fève est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents :

le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30% et le dernier apporte 20% du stock.

Pour le premier, 98% de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90% de sa production est conforme, et le troisième fournit 20% de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note  $F_i$  l'événement « la fève provient du fournisseur  $i$  », pour  $i$  prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et  $C$  l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme.  
Le résultat sera arrondi à  $10^{-2}$ .
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92% de fèves qu'elle achète soient conformes.  
Quelle proportion  $p$  de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif?

### Exercice 4 (6 points)

#### Partie A

Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $u(x) = \ln(x) + x - 3$ .

1. Justifier que la fonction  $u$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. Démontrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de  $u(x)$  en fonction de  $x$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\ln(x) - 2] + 2$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$  où  $u$  est la fonction définie dans la partie A.  
(b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

#### Partie C

Soit  $\mathcal{C}'$  la courbe d'équation  $y = \ln(x)$ .

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$ .  
En déduire que les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ont un seul point commun et en déterminer les coordonnées.
2. On admet que la fonction  $H$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$  est une primitive de la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

Calculer  $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$ .

Interpréter graphiquement ce résultat.

