Chapitre :
Exponentielle

∽

I. Définition

Propriété **(Complément de dérivation)**
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et soit a et b deux réels.
Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' : x \mapsto af'(ax+b)$

Démonstration : Admis □

Propriété Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$. En particulier, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration (Exigible) : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.
Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour φ et (forme uv) :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

(On utilise la propriété précédente pour $x \mapsto f(-x)$, de dérivée $x \mapsto -f'(-x)$)
Donc φ est constante. Or $\varphi(0) = f(0)f(0) = 1$ et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = f(x)f(-x) = 1$.
Si l'on suppose qu'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on aurait $f(x)f(-x) = 0$, ce qui contredit le résultat démontré plus haut. □

Propriété Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration (Exigible) : L'existence de la fonction est admise. Démontrons l'unicité :
Supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui vérifient les conditions. D'après la propriété de la section précédente g en particulier ne s'annule pas. On peut donc définir $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$$

Ainsi, φ est constante, égale à $\varphi(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, c'est à dire $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$. □

Définition L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On peut la noter exp. On a donc $\exp(0) = 1$.

Ainsi :

Propriété La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

▶ **Exercices :** 4,5,6,7p114 (dérivation)

Propriété **(Relation fonctionnelle)** Pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration : Soit $y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(y) \neq 0$.
On pose alors $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On démontre que $\varphi'(x) = \varphi(x)$ (ici $\exp(y)$ est une constante !) :

$$\varphi'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \varphi(x)$$

D'autre part, $\varphi(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$.
Ainsi, φ satisfait les hypothèses de la propriété permettant de définir la fonction exponentielle, et donc $\varphi(x) = \exp(x)$ par unicité.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$,
c'est à dire $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. □

Remarque On dit parfois que la fonction exp transforme les sommes en produit.

II. Propriétés

Propriété La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$. D'après la relation fonctionnelle on a alors :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Or exp ne s'annule pas et un carré est toujours positif. Donc $\exp(x) > 0$. □

Propriété La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Puisque, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$, il est immédiat que exp est strictement croissante. □

Propriété Soit a et b des nombres réels, et soit $n \in \mathbb{N}$.
Les égalités suivantes sont conséquence de la relation fonctionnelle :

$$\exp(2a) = (\exp(a))^2 \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(na) = (\exp(a))^n$$

Démonstration : Exercice. La dernière se fait par récurrence sur n. □

▶ **Exercices :** 12,13,14p114 (simplification)

Définition (Nombre e) On note e le nombre $\exp(1)$. Ainsi, $\exp(1) = e$.
D'après la propriété précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$$

On généralise cette égalité, et on note, pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$.

On retrouve alors, notées différemment, les propriétés vues plus tôt :
On a alors pour tous x et y réels et n relatif :

$$\boxed{\begin{array}{c} x \mapsto e^x \text{ a pour dérivée } x \mapsto e^x \\[2ex] e^0 = 1 \qquad e^x > 0 \qquad e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{nx} = (e^x)^n \\[2ex] e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \end{array}}$$

▶ **Exercices :** donner les écritures des fonctions de 4,5,6,7p114 avec la notation e^x.

▶ **Exercices :** 16,17,18,19p114 (simplification)

▶ **Exercices :** 68,69p116 (simplification)

▶ **Exercice :** (DM) 73p116 (suites)

Propriété (Équations et inéquations) Soit a et b deux nombres réels. Alors :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

et

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Démonstration : Cela provient de la stricte croissance de la fonction exponentielle □
Cette propriété a pour intérêt principal de permettre la résolution de certaines équations mettant en jeu l'exponentielle.

Exemple Soit à résoudre l'équation $e^{2x+5} = e^9$.
Cette équation équivaut à $2x + 5 = 9$, soit à $x = 2$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{2\}$.

▶ **Exercices :** 22,23,24p114 (équations), 2p114 (inégalités), 28,30,31p115 (inéquations)

▶ **Exercices :** 80p116 (équations), 82,84p117 (inéquations), 86p117 (étude de signe)

▶ **Exercices :** 105p118 (dérivation, étude de variations)

III. exponentielle de u

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction e^u est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $u'e^u$.
De plus, e^u a le même sens de variations que u.

Démonstration : La première partie est admise.
Pour la seconde partie, comme $e^u > 0$, alors $u'e^u$ a le même signe que u, donc u et e^u ont les mêmes variations. $\square$

Exemple Étudier la fonction $f : x \mapsto e^{-4x}$; Voir page 112 pour d'autres exemples.

▶ **Exercices :** 50,52p115 (dérivation), 54p115 (variations)

▶ **Exercices :** 122,123p119 (dérivation)

▶ **Exercice :** 133p119 (problème)

▶ **Exercice :** (ACCPE / groupe) : activité 1p104 (sous-tangente constante)

IV. Limites

Propriété On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration (exigible) :

- Soit $f(x) = e^x - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$.
  Par suite, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
  Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
  Or $f(0) = 1 > 0$. Donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$.
  Autrement dit, quelque soit $x \geqslant 0$, $e^x > x$.
  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- Par réécriture, changement de variable, et la limite déjà déterminée :
  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ □

Propriété On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration :

- Soit $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$. La fonction f est dérivable sur $I = [0; +\infty[$ et $f'(x) = e^x - x$.
  On a vu plus haut que f' est strictement positive sur I.
  Donc f est croissante sur I.
  Or $f(0) = 1 > 0$. Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, autrement dit $e^x > \dfrac{x^2}{2}$.
  En divisant par $x > 0$, on obtient $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.
  Donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
- On a $xe^x = \dfrac{x}{e^{-x}} = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{-x}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$.
  (il s'agit de l'inverse de la limite déteminée précédemment)
- On sait que la fonction exp : $x \mapsto e^x$ est dérivable, de dérivée elle-même. Or $\exp(0) = 1$.
  Donc par définition du nombre dérivé, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = 1$, soit $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. □

Remarque On retient les deux premières limites de la propriété précédente en se rappelant que l'exponentielle l'emporte.

▶ **Exercices :** 36,38,39,40p115

▶ **Exercices :** 48,49p115 (e^u)

▶ **Exercices :** 94,95,96,97p117

▶ **Exercices :** 119,120p118