Chapitre :
Intégration

∽

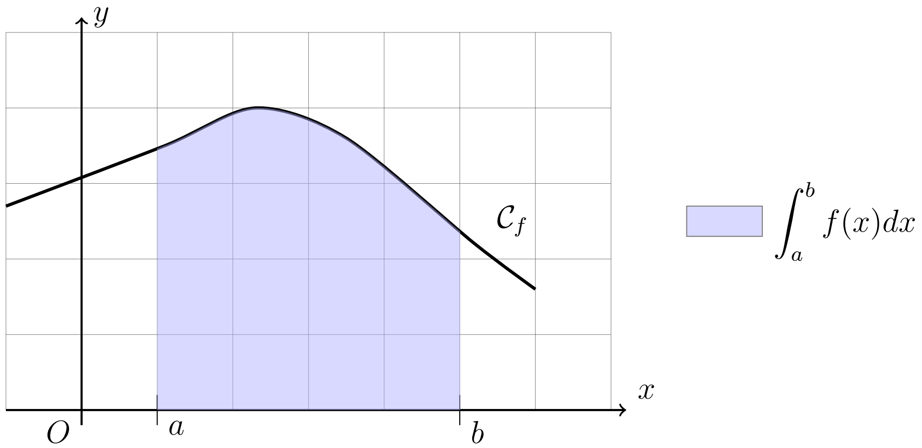
⊛ **Activité :** 1p164 (approcher une aire par des rectangles ; nécessite Géogebra)

On considère un repère orthogonal $(O; I; J)$.
On appelle unité d'aire l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

I. Intégrale d'une fonction positive

1. Définition

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. L'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

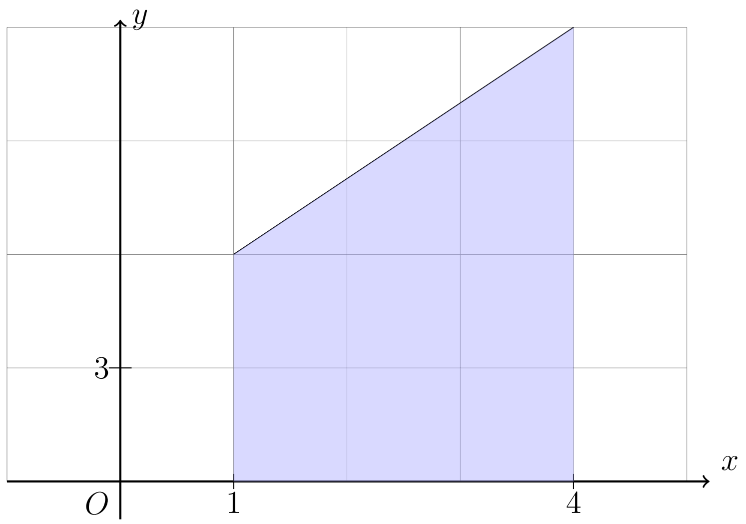


Remarque le symbole $\int$ représente une somme (il ressemble à un S), $f(x)d(x)$ représente l'aire d'un rectangle de largeur (très petite) dx et de hauteur $f(x)$. La variable x est muette, c'est à dire que l'on peut noter aussi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

autrement dit, le nombre ne dépend pas de x, mais uniquement de f, a et b.

Exemple (Cas facile de la fonction affine)
Soit $f : x \mapsto 2x + 4$.
Pour calculer $\int_1^4 f(x)dx$, autrement dit l'aire située entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, il suffit d'observer que l'on a à faire à un trapèze rectangle :



Aire d'un trapèze rectangle : $\dfrac{l \times (L_1 + L_2)}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx = \frac{(4-1) \times (f(1) + f(4))}{2} = \frac{3 \times (6+12)}{2} = \frac{3 \times 18}{2} = 3 \times 9 = 27$.

Remarque En général, le calcul d'intégral est un problème difficile. Nous nous contenterons de cas faciles, tout particulièrement au début.

▶ **Exercices :** 1,2p176

Méthode On peut utiliser une calculatrice pour obtenir la valeur d'une intégrale.
Voir page 167 (ou pages 411 et 416) (on peut aussi utiliser la méthode graphique)

▶ **Exercices :** 4p176

▶ **Exercices :** 38,39,40,41p178

▶ **Exercice :** (algo) p166 (encadrement par aires de rectangles)

▶ **Exercice :** (algo) 44p178 (approximation par des aires de trapèzes)

2. Fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$

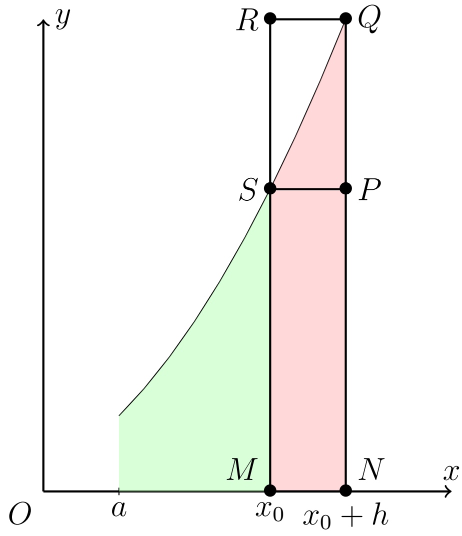
⊛ **Activité :** 2p164

Théorème

Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a; b]$.
On définit, pour tout $x \in [a; b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
Alors F est une fonction dérivable sur $[a; b]$ et pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration (non exigible) :
On ne fait la démonstration que dans le cas où la fonction est strictement croissante.
On a donc un cas similaire à celui représenté ci-contre.
Soit $x_0 \in [a;b]$ et soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a;b]$. On a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt \quad \text{et} \quad F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$



Puisque f est positive, la différence $F(x_0+h) - F(x_0)$ est l'aire coloriée en rouge sur la figure.
Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle $MNPS$ qui vaut $h \times f(x)$ et celle de $MNQR$ qui vaut $h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante, on a :

$$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$

Puis, comme $h > 0$,

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Par suite, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On peut tenir le même type de raisonnement avec $h < 0$.
Finalement, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$, cela quelque soit $x_0 \in [a;b]$.
Donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$. □

▶ **Exercices :** 49,50p179

▶ **Exercices :** 52 (corrigé),53 (avec fonction ln non encore traitée), 54 (fonction non positive) p179

▶ **Exercice :** (supplément) 34p177 (différence d'aire)

II. Primitives

1. Définition, premières propriétés

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème Toute fonction continue (de signe quelconque) sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration : Elle n'est faite que dans le cas où I est de la forme $[a;b]$, avec a et b réels.
On sait déjà qu'une fonction g **positive** et continue sur $[a;b]$ admet une primitive.
En effet, la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée g.
Soit maintenant f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[a;b]$. On admet que f admet alors nécessairement un minimum m sur $[a;b]$.
Soit alors $g(x) = f(x) - m$. Alors g est continue est positive sur $[a;b]$, donc admet une primitive G.
On pose alors $F(x) = G(x) + mx$.
Alors F est dérivable et $F' = G' + m = g + m = f$. Donc f admet bien une primitive sur $[a;b]$. □

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Soit F une primitive de f sur I. Alors pour toute fonction G, G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe un réel k tel que $G = F + k$.
  Autrement dit toutes les primitives diffèrent d'une constante (et il y en a une infinité).
- Soit $x_0 \in I$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction G primitive de f sur I et telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration :

- ⋆ Il est évident que pour toute constante k, $G = F + k$ est une primitive de f.
  ⋆ Réciproquement, soit G une primitive de f. Alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, donc $G - F$ est constante sur I, autrement dit il existe un réel k tel que $G - F = k$, donc $G = F + k$.
- ⋆ On démontre d'abord l'existence d'une telle fonction. Soit F une primitive de f. On cherche une fonction G, primitive de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.
  D'après le point précédent, G doit être de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
  Alors $G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$.
  Finalement, $G = F + (y_0 - F(x_0))$ est solution du problème.
  ⋆ On démontre ensuite l'unicité de la solution. Soit G_1 et G_2 deux fonctions solutions. Alors $(G_1 - G_2)' = f - f = 0$, donc $G_1 - G_2$ est constante sur I. Or $(G_1 - G_2)(x_0) = y_0 - y_0 = 0$. Ainsi, $G_1 - G_2 = 0$, soit $G_1 = G_2$. □

▶ **Exercices :** 14,15,16p176 (primitives données)

▶ **Exercices :** 56,57p179 (idem + chercher une primitive particulière)

2. Méthodes

La méthode de recherche d'une intégrale vient la bonne connaissance des formules de dérivation,

puisqu'il s'agit de faire l'opération contraire.
L'ensemble des formules à connaître est donné dans le livre à la page 170.
Les seuls cas « évidents » de formules sont les sommes et les produits par une constante, et par suite les fonction polynomiales.

Exemple soit $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$. Alors une primitive de f est donnée par :
$F(x) = 3 \times \left(\frac{1}{3}x^3\right) + 5 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right) - 2x + k = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

▶ **Exercices :** 5,6,8,9p176

▶ **Exercices :** 64,65p180

⚠ Il n'y a pas de formule pour l'intégrale d'un produit ou d'un quotient quelconque !
Il faut absolument déterminer la bonne forme d'une fonction pour chercher sa primitive, et il peut parfois être nécessaire d'identifier une fonction et sa dérivée.

Exemple Soit $f(x) = 2xe^{x^2}$.
f est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$ (et $u'(x) = 2x$).
Par suite, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par $F(x) = e^{u(x)} + k = e^{x^2} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

▶ **Exercices :** 12,13p176, 66,67,68p180 (sauf trigonométriques)
Dans certains cas il y a une constante **multiplicative** en trop (ou en moins). Ce cas n'est pas un problème :

Exemple Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Cette fonction est « presque » de la forme $\frac{u'}{u}$. Plus proprement :
Soit $u(x) = x^2 + 1$. Alors $u'(x) = 2x$, et on a $f(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.
Par suite, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par :
$F(x) = 2 \times \ln(x^2 + 1) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

▶ **Exercices :** 60,61p180

▶ **Exercices :** 71,73p180

3. Calcul d'intégrales

La connaissance des primitives d'une fonction permet de calculer des intégrales :

Propriété Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration : On sait déjà que $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.
Toute primitive F de f est donc de la forme $F = G + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Par suite,

$$F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

□

Exemple Cherchons à calculer $I = \int_2^5 \frac{1}{x}dx$.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. la fonction f a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x)$ sur $[2;5]$.
Donc $I = \displaystyle\int_2^5 f(t)dt = F(5) - F(2) = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

On généralise cela aux fonctions continues de signe quelconque :

Définition Soit f une fonction continue (de signe quelconque) sur un intervalle I ayant pour primitive F sur I. Soit a et b deux réels de I.
On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$, soit :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Remarque Il est à noter que l'on n'a pas précisé que $a < b$: ce n'est pas nécessaire.

▶ **Exercices :** 17,18p176

▶ **Exercices :** 79,80,81p181
Par suite, on obtient les propriétés suivantes :

Propriété Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit a, b et c trois réels de I et soit k un réel quelconque. Alors

$$\int_a^a f(t) = 0 \qquad \int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt \qquad \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Ces deux propriétés ci-dessus sont appelées propriété de linéarité de l'intégrale.

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \quad \text{(Relation de Chasles)}$$

Si $a < b$ et si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
Si $a < b$ et si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$.

Démonstrations : Il suffit d'utiliser la définition précédente, ainsi que les formules de primitive pour une somme et le produit par une constante.
Le dernier point est une conséquence du point précédent et de la linéarité de l'intégrale (on considère la différence $f(x) - g(x) \geqslant 0$). □

▶ **Exercice :** 21p176

▶ **Exercices :** 90,91,92p182 (linéarité et Chasles)

▶ **Exercice :** 27p177 (signe d'intégrales)

▶ **Exercices :** 94,95p182p182 (encadrement)

▶ **Exercice :** 101,102p183 (avec des suites)

4. Applications

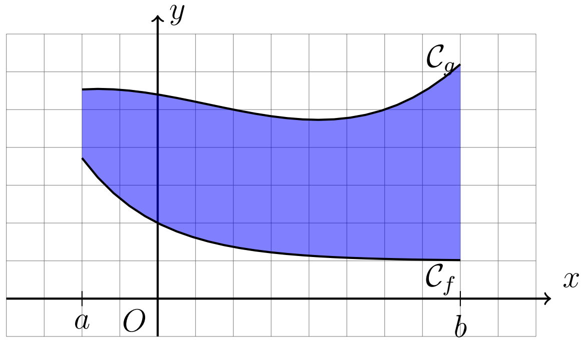
a. Calculs d'aires

On sait déjà que l'intégrale d'une fonction positive correspond à une aire. Mais on peut alors déterminer d'autres aires :

Propriété Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$. Alors l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $-\int_a^b f(t)dt$.

Propriété Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$. Alors l'aire délimitée par la courbe représentative de f, celle de g, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b (g(t)-f(t))dt$.

Illustration :



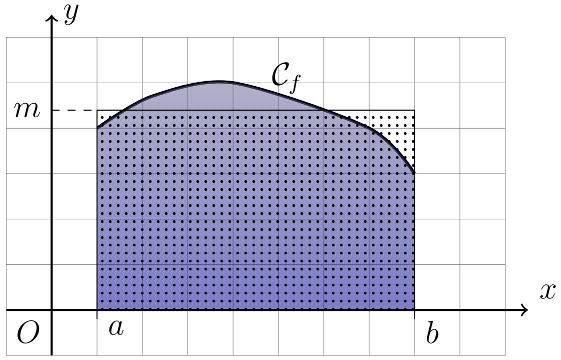
▶ **Exercices :** 106,107p183

b. Valeur moyenne d'une fonction

Définition (Valeur moyenne) Soit a et b deux réels tels que $a<b$. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

L'interprétation graphique est la suivante :



La zone bleue et le rectangle ont la même aire. En effet, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m \times (b-a)$.

▶ **Exercices :** 113,114,115,116p184