Chapitre :
Logarithme

∽

⊛ **Activité :** 1p134 (fonction réciproque de la fonction exponentielle)

I. Définition

La fonction exponentielle étant strictement croissante à valeurs strictement positives, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, quelque soit $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.
Par conséquent, on peut définir :

Définition La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.
Autrement dit :
- Pour tout $x > 0$ et y réel, $x = e^y$ équivaut à $\ln(x) = y$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.

On dit que l'exponentielle et le logarithme sont les fonctions inverses l'une de l'autre.

Exemple À retenir :
- $\ln(1) = 0$ car $1 = e^0$, donc $\ln(0) = \ln(e^0) = 0$
- $\ln(e) = 1$ car $e = e^1$, donc $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- Pour tout λ réel, l'équation $\ln(x) = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$

▶ **Exercices :** 4,5p144 (ensembles de définition)

II. Dérivée et variations

Propriété La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :
Si on admet que la fonction ln est dérivable, on utilise la fonction $x \mapsto e^{\ln x}$ définie sur $]0; +\infty[$.
Elle est de la forme e^u avec $u(x) = \ln(x)$. Sa dérivée est donc $u'e^u$, dont l'expression est $\ln'(x)e^{\ln x}$.
Or $e^{\ln x} = x$, donc la dérivée de la fonction est $x \mapsto 1$ et : $\ln'(x) \times x = 1$.
Comme $x \neq 0$, on a bien $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. □

Corollaire La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus :
- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$;
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$;
- Soit a et b strictement positifs. Alors :
  - ⋆ $a = b$ équivaut à $\ln(a) = \ln(b)$;
  - ⋆ $a > b$ équivaut à $\ln(a) > \ln(b)$;

Démonstration : Puisque $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction ln est effectivement strictement croissante. On sait par suite que $\ln(1) = 0$; les propriétés suivantes proviennent directement de la stricte croissance de ln. □

▶ **Exercices :** 6,8,9p144 (équations)

▶ **Exercices :** 1,12p144 ((inégalités), 14,15p144 (inéquations)

▶ **Exercices :** (39,)40,43,44,46p146

▶ **Exercice :** 50p146 (suite)

▶ **Exercices :** 55,56p147

▶ **Exercices :** 58p147 (logique), 59p147 (tangentes)

▶ **Exercice :** 62p147 (trouver des paramètres a, b et c d'une fonction)

III. Relation fonctionnelle

⊛ **Activité :** 3p135

Théorème **(Relation fonctionnelle du logarithme)**
Pour tous a et b réels strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On dit parfois que le logarithme transforme le produit en somme. (Rappel : l'exponentielle transforme la somme en produit).

Démonstration : Équivalences en passant par l'exponentielle. □

Propriété Pour tout $b > 0$,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Démonstration : Similaire à la précédente. □
Les deux précédentes propriétés permettent d'établir les résultats suivants :

Corollaire

- Soit a et b strictements positifs. Alors :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

  le nombre n peut également être un entier relatif pour la dernière égalité.
- Pour tout $a > 0$,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstration : On ne démontre que la dernière.
Pour tout $a > 0$, $\sqrt{a}^2 = a$. Donc $\ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$. Or d'après la relation fonctionnelle,

$\ln(\sqrt{a}^2) = \ln(\sqrt{a}\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. On peut alors conclure que $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.
Les autres sont laissées en exercice. $\square$
Ces relations permettent bien entendu de réécrire des expressions utilisant le logarithme.

▶ **Exercices :** 20,21,22,25,27p145

▶ **Exercices :** 66p147, (68p148)

▶ **Exercices :** 69,70p148 (équations avec relation à utiliser)

▶ **Exercices :** 71,76p148 (détermination de d'exposants/rangs)

IV. Limites

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration : Soit A un réel. Comme ln est strictement croissante, pour tout $x > e^A$, $\ln(x) > \ln(e^A) = A$, d'où la première limite.
On fait un changement de variable pour l'autre limite : $X = \dfrac{1}{x}$. On a $\ln(x) = -\ln(X)$. $\square$

D'autres limites sont à connaître :

Propriété

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Démonstration : Il s'agit *a priori* de limites indéterminées. Cependant :
- dans le premier cas, il s'agit d'un nombre dérivé : celui de la fonction ln en 1.
  En effet, $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$, et comme ln est dérivable en 1, la limite de cette expression lorsque h tend vers 0 est par définition $\ln'(1)$, soit $\dfrac{1}{1} = 1$.
- Dans le second cas, on passe par un changement de variable en utilisant l'exponentielle.
  En posant $X = \ln x$ on a $x = e^X$ et :
  $$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}$$
  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (chapitre sur l'exponentielle).
  Par conséquent, par composition on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
- On pose $X = \dfrac{1}{x}$, alors $x = \dfrac{1}{X}$ et :
  $$x\ln x = \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$$
  Or $\lim\limits_{x\to 0} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. $\square$

▶ **Exercices :** 28,29,30,31,33p145

▶ **Exercices :** 81,82,85,86,87,88p149

▶ **Exercice :** 84p149 (suite et algorithme)

V. Fonctions $\ln u$

Propriété Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration : Admis □

Exemple Soit $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = x^2+1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. Par conséquence f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{u}$, donc

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

▶ **Exercices :** 35,36,38p145

▶ **Exercices :** 91,92p149

VI. Logarithme décimal

Le logarithme utilisé en cours de physique au lycée n'est pas la fonction ln, mais la fonction log.

Définition Pour tout $x > 0$, on pose $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Une conséquence de cette définition est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = n$.
En effet, $\log(10^n) = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \dfrac{n \times \ln(10)}{\ln(10)} = n$.
En particulier, $\log(10) = 1$.
Pour le reste, la fonction log admet la même relation fonctionnelle et a les mêmes variations que ln.

★ **Approfondissement :** 126,127,128p159