Chapitre :
Fonctions de référence

∽

I. Second degré

⊛ **Activité :** QCM A et B(1 et 2) page 32

1. Différentes formes

⊛ **Activité :** 1 page 34 (observation des valeurs observables selon la forme)

Rappel Une fonction polynomiale du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut être écrite sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **polynôme de degré 2** ou **trinôme du second degré**.

Définition L'expression d'une fonctions polynomiale de degré 2 peut s'écrire sous deux à trois formes différentes :

- **développée :** $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **canonique :** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
- **factorisée (n'existe pas toujours) :** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Le nombre a est le même dans les trois expressions.

Exemple Soit $f(x) = 4x^2 + 4x - 24$.
La forme canonique de f est $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 25$, avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -25$.
En effet, $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 25 = 4\left(x^2 + 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 25 = 4x^2 + 4x + 1 - 25 = 4x^2 + 4x - 24 = f(x)$.
La forme factorisée de f est $4(x - 2)(x + 3)$, avec $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.
En effet, $4(x - 2)(x + 3) = 4(x^2 + 3x - 2x - 6) = 4x^2 + 4x - 24 = f(x)$

▶ **Exercices :** 19 (corrigé),25p44, conseiller les 23 et 24p44 (corrigés)

▶ **Exercices :** 2,3 p37 (avec résolution d'équations)

Rappel La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une **parabole**.

Propriété Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Alors :

- Le signe de a donne l'orientation de la parabole :
  - ⋆ Si $a > 0$, alors les branches sont vers le haut ;
  - ⋆ Si $a < 0$, alors les branches sont vers le bas.
- Le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole.
  La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.
  De plus, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Par conséquent on a les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Cas $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Cas $a < 0$

Exemple Reprenons $f(x) = 4x^2 + 4x - 24 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 25$.

On a $a = 4 > 0$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -25$, donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	-25	$\nearrow$	

▶ **Exercices :** 1 p37 et 21,22p44 (allure)

▶ **Exercices :** 26p44, 30, 32 p45

▶ **Exercice :** (algo) 33p45

2. Équation du second degré

⊛ **Activité :** 2p34 (lien entre nombre de racines et $\Delta = b^2 - 4ac$)

Définition Résoudre une équation du second degré, c'est trouver tous les réels x qui vérifient une égalité pouvant s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$.
Les solutions d'une telle équation, lorsqu'elles existent, sont appelées **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$. Elles sont les abscisses des points d'intersections de la parabole avec l'axe des abscisses.

Définition On appelle **discriminant** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ce nombre est utilisé pour la résolution des équations du second degré.

Théorème Il y a trois cas en fonctions de Δ :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution :

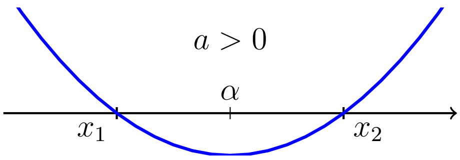
$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

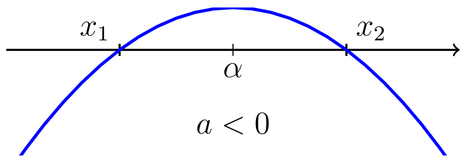
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Démonstration : Admis. □

Graphiquement :

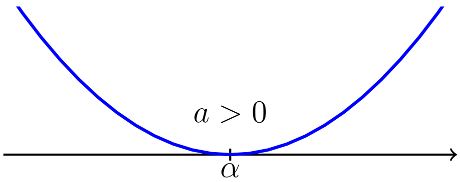
- Si $\Delta > 0$, la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.

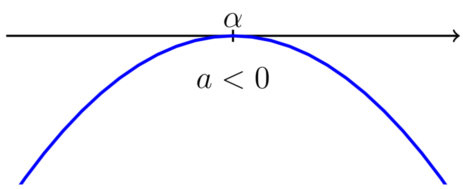




De plus, l'abscisse du sommet α est la moyenne des racines : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
Dans ce cas, on peut écrire $f(x)$ sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

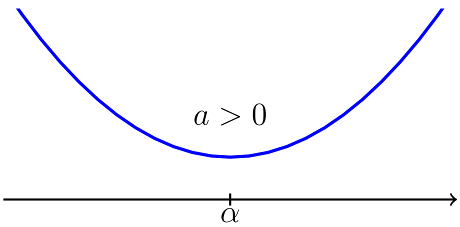
- Si $\Delta = 0$, la parabole touche une seule fois l'axe des abscisses, précisément en son sommet.

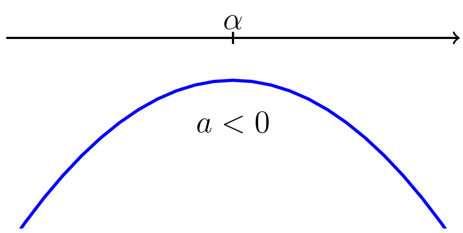




Dans ce cas l'expression de $f(x)$ peut être donnée sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2$.

- Si $\Delta < 0$, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.





Exemple Soit $f(x) = -x^2 + x + 6$.
Alors $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{-1 - 5}{-2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-2} = -2$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-2; 3\}$.

▶ **Exercices :** 38,40,41,(42,43,44)p46 (application directe)

▶ **Exercices :** 39,46,47p46 (résolution à adapter)

▶ **Exercices :** (DM ?) 49,50p47 (avec des fractions)

▶ **Exercices :** 52,53,55,56p47 (avec interprétation, positions relatives)

▶ **Exercices :** 57p47, 59,60,61,62 p48 (problèmes économiques, dont un ou deux en DM ?)

3. Signe du trinôme

⊛ **Activité :** Voir rapidement les différents cas à l'aide de courbes.

Propriété Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est le plus souvent du signe de a. Dans le cas où il y a deux racines, alors le signe « entre les racines » est le contraire de celui de a.
L'étude du signe de $ax^2 + bx + c$ dépend donc de a et de Δ.

Pour plus de détails, voir le livre page 40 (conseil : reproduire le tableau dans le cours).

Exemple Reprenons $f(x) = -x^2 + x + 6$. On sait que $\Delta > 0$ et que les racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$. De plus, $a = -1 < 0$. Alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque Étudier le signe d'une fonction revient à étudier la position relative de la courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses :
- Lorsque $f(x) > 0$, alors la courbe représentative est située au dessus de l'axe des abscisses.
- Lorsque $f(x) < 0$, alors la courbe représentative est située en dessous de l'axe des abscisses.
- Lorsque $f(x) = 0$, alors la courbe représentative est située sur l'axe des abscisses.

L'étude du signe de $f(x)$ permet aussi de résoudre des inéquations.

Exemple On considère à nouveau $f(x) = -x^2 + x + 6$. Si on veut résoudre $f(x) < 0$, l'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

▶ **Exercices :** 6p41 et 67,(68,69),74p49 (application directe)

▶ **Exercices :** 7p41 et 70,71,72p49 (signe sans Δ)

▶ **Exercices :** 76p49 (inéquation)

▶ **Exercices :** 77,78,81p50 (tableaux de signes plus complexes)

▶ **Exercice :** 85p50 (position relative parabole/droite)

★ **Approfondissement :** 95,96p53

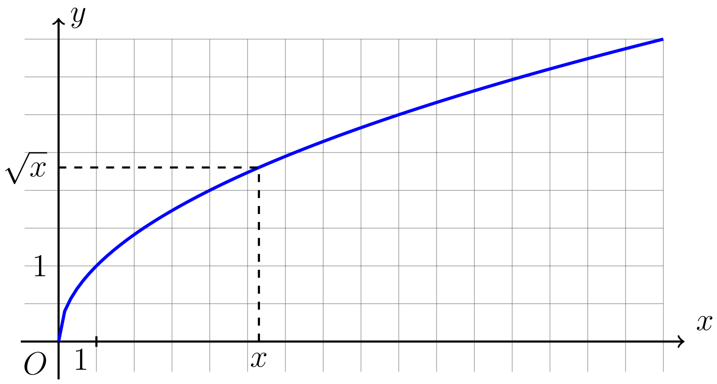
II. Fonction racine carrée

1. Définition

Rappel La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif dont le carré est x.
On note $\sqrt{x}$ la racine carrée de x. On a donc par définition $(\sqrt{x})^2 = x$.

Définition La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. Représentation graphique



Remarque il s'agit d'une branche de parabole « couchée » (x étant le carré de $\sqrt{x}$).

3. Variations

Propriété La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Autrement dit on a le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$

Cela signifie par définition que pour tous réels positifs a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

Démonstration : Considérons deux réels a et b positifs tels que $a \leqslant b$. On doit montrer que $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, donc que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant 0$. Or on a supposé que $a \leqslant b$, donc $a - b \leqslant 0$. Puisque a et b sont positifs, on peut écrire que $a = \sqrt{a}^2$ et $b = \sqrt{b}^2$. Ainsi, $a - b = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ (identité remarquable). Or la racine carrée d'un nombre est toujours positive, donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 0$.
Alors nécessairement, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant 0$. □

▶ **Exercices :** 9p91 (étude d'un signe), 76p101 (encadrements)

4. Utilisation

a. Ensembles de définition

La racine carrée d'un nombre n'est définie que si le nombre est positif.

Exemple $\sqrt{5-x}$ est définie si $5-x \geqslant 0$, autrement dit si $x \leqslant 5$.
Ainsi $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ a pour ensemble de définition $]-\infty; 5]$.

▶ **Exercice :** 5p91

▶ **Exercices :** 66p100 (ensemble de définition), 64,63p100 (courbes à identifier)

b. Résolution d'(in)équations

Pour résoudre des équations ou inéquations avec une racine carrée, le plus souvent on fait en sorte d'isoler la racine carrée pour appliquer si possible la fonction carrée (qui est croissante sur $[0; +\infty[$.

Exemple

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+5<7 &\Leftrightarrow \sqrt{x}<2\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2<2^2\\ &\Leftrightarrow x<4\end{aligned}$$

Sachant que x doit être positif (à cause de $\sqrt{x}$), l'ensemble des solutions est donc $[0; 4[$.

▶ **Exercices :** 6,7,8p91

▶ **Exercices :** 67,69,70,72p100

▶ **Exercices :** 77(c),78p101 (tableaux de signes)

★ **Approfondissement :** 80,81p101

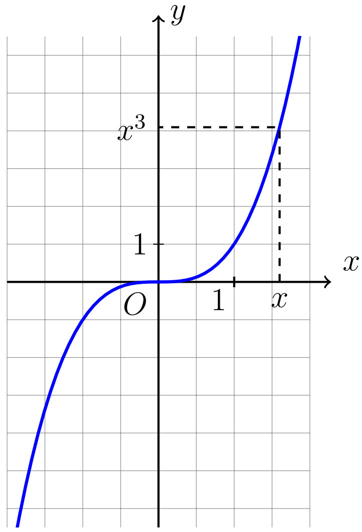
III. Fonction cube

⊛ **Activité :** 3p87

1. Définition et représentation

Définition La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Sa courbe représentative est la suivante.
On pourra remarquer que l'origine O est un centre de symétrie pour la courbe.



2. Variations

Propriété La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
x^3	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

Démonstration : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On doit démontrer que $a^3 < b^3$. Deux cas :

- Si a et b ne sont pas de même signe, alors $a < 0$ et $b > 0$.
  Par suite, $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$, autrement dit $a^3 < 0 < b^3$. Ainsi $a^3 < b^3$.
- Si a et b sont de même signe, alors $ab > 0$. Par suite,

$$\begin{aligned} & a < b \\ \Rightarrow & a^3 < a^2 b \quad (\times a^2 > 0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & a < b \\ \Rightarrow & a^2 b < ab^2 \quad (\times ab > 0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & a < b \\ \Rightarrow & ab^2 < b^3 \quad (\times b^2 > 0) \end{aligned}$$

  On a donc $a^3 < a^2 b < ab^2 < b^3$, et ainsi $a^3 < b^3$.

Dans tous les cas on a bien $a^3 < b^3$. La fonction cube est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\square$

Corollaire Quelques soient les réels a et b, on a :

$$a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b \qquad \text{et} \qquad a^3 > b^3 \Leftrightarrow a > b$$

Cela permet de résoudre des (in)équations :

Exemple On souhaite résoudre l'inéquation $x^3 > 27$.
Or $x^3 > 27 \Leftrightarrow x^3 > 3^3 \Leftrightarrow x > 3$.
Donc $\mathcal{S} =]3; +\infty[$.

▶ **Exercices :** 10,11,12p93 et 90,93p102 ((in)équations)

▶ **Exercices :** 86,87p102 (courbes à identifier)

▶ **Exercices :** 95,96p103 (résolution approchée)

▶ **Exercices :** 100p103

★ **Approfondissement :** 98 (en DM ?), 102p103

★ **Approfondissement :** (comparaisons) activité 4p87